

---

Das Verhalten von Lösungen der vektoriellen  
Helmholtzgleichung in Außenräumen für kleine Frequenzen  
unter elektrischen Randbedingungen

---

**Stefan Evert**

Diplomarbeit

angefertigt bei Prof. Dr. P. Werner,  
Math. Institut A, 5. Lehrstuhl, Universität Stuttgart

30. JULI 1999

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rückführung auf Integralgleichungen</b>	<b>8</b>
2.1	Potentialfelder und Sprungbedingungen . . . . .	8
2.1.1	Flächenpotentiale . . . . .	8
2.1.2	Volumenpotentiale . . . . .	9
2.2	Das elektrische Randwertproblem . . . . .	10
2.3	Das magnetische Randwertproblem . . . . .	11
2.4	Innenprodukt und adjungierte Integraloperatoren . . . . .	12
2.5	Rückführung auf Randintegralgleichungen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Die Matrix-Methode</b>	<b>17</b>
3.1	Ein Modellproblem . . . . .	17
3.2	Die Matrixgleichung . . . . .	20
3.3	Motivation eines neuen Ansatzes . . . . .	22
3.4	Formulierung der Matrix-Methode . . . . .	24
3.5	Eine Anwendung . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Das elektrische Randwertproblem</b>	<b>28</b>
4.1	Die Nullräume von $\mathbf{I} + \mathbf{L}_0$ und $\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0$ . . . . .	28
4.2	Physikalische Interpretation . . . . .	32
4.3	Abschätzungen für $\kappa \rightarrow 0$ . . . . .	38
4.4	Die Matrixgleichung des ERP . . . . .	41
4.4.1	Aufstellen der Matrixgleichung . . . . .	41
4.4.2	Asymptotik der Blockoperatoren . . . . .	43
4.4.3	Auflösen der Matrixgleichung . . . . .	51
4.4.4	Das Verhalten der Lösung des ERP für $\kappa \rightarrow 0$ . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>59</b>
5.1	Die Spektralschar von $A$ . . . . .	59
5.2	Das elektrische RAWP mit zeitharmonischer Anregung . . . . .	60
5.3	Das elektrische RAWP mit konstanter Anregung . . . . .	61

# 1 Einleitung

Werner hat in den Arbeiten [9], [10], [11] und [12] das **Rand- und Anfangswertproblem für elektromagnetische Wellen** in Außenräumen  $\Omega$  untersucht. Gesucht sind Lösungen der **maxwellischen Gleichungen**

$$(1.1) \quad \nabla \times E + \mu \frac{\partial}{\partial t} H = 0,$$

$$(1.2) \quad \nabla \times H - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E - \sigma E = J$$

für  $x \in \Omega$  und  $t \in [0, \infty)$ , die der Randbedingung

$$(1.3) \quad n \times E = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

und den Anfangsbedingungen

$$(1.4) \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x)$$

in  $\overline{\Omega}$  genügen;  $n$  bezeichnet in diesem Zusammenhang stets die nach außen, d.h. in  $\Omega$  hinein gerichtete Normale auf  $\partial\Omega$ . Der Außenraum  $\Omega$  ist gegeben durch

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

wobei  $D$  aus  $n$  disjunkten, beschränkten Körpern (physikalisch als ideal leitende Reflektoren zu interpretieren) mit glatten Rändern besteht:

$$D = D_1 + \dots + D_n.$$

Für die Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit setzen wir speziell

$$\partial D_i \in C^6 \quad (i = 1, \dots, n)$$

voraus. Wir bezeichnen das topologische Geschlecht von  $D_i$  mit  $p_i$  (d.h.  $D_i$  ist homöomorph zu einer Kugel mit  $p_i$  Henkeln). Die Zahl

$$p := p_1 + \dots + p_n.$$

gibt das topologische Geschlecht von  $D$  bzw.  $\Omega$  an.<sup>1</sup> Die Bezeichnungen  $n$  für die Anzahl der Reflektoren und  $p$  für das topologische Geschlecht von  $\Omega$  werden im folgenden beibehalten.

Durch Elimination von  $H$  bzw.  $E$  ergeben sich aus (1.1)–(1.4) die Rand- und Anfangswertprobleme

$$(1.5) \quad \Delta E = \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} E + J_1 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

$$(1.6) \quad n \times E = 0, \quad \nabla \cdot E = \gamma_1 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

$$(1.7) \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x, 0) = E_1(x) \quad \text{für} \quad x \in \overline{\Omega}$$

für das elektrische Feld  $E$  und

$$(1.8) \quad \Delta H = \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} H + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} H + J_2 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

$$(1.9) \quad n \times (\nabla \times H) = c, \quad n \cdot H = \gamma_2 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

$$(1.10) \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} H(x, 0) = H_1(x) \quad \text{für} \quad x \in \overline{\Omega}$$

---

<sup>1</sup>siehe hierzu etwa ([3], 97)

für das magnetische Feld H mit

$$(1.11) \quad J_1(x, t) := e^{-\sigma t/\epsilon} \nabla(\nabla \cdot E_0(x)) + \mu \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) - \frac{1}{\epsilon} \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)/\epsilon} \nabla(\nabla \cdot J(x, \tau)) d\tau \quad \text{für } x \in \bar{\Omega},$$

$$(1.12) \quad \gamma_1(x, t) := e^{-\sigma t/\epsilon} \nabla \cdot E_0(x) - \frac{1}{\epsilon} \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)/\epsilon} \nabla \cdot J(x, \tau) d\tau \quad \text{für } x \in \partial\Omega,$$

$$(1.13) \quad E_1(x) := \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times H_0(x) - \sigma E_0(x) - J(x, 0)) \quad \text{für } x \in \bar{\Omega}$$

bzw.

$$(1.14) \quad J_2 := \nabla(\nabla \cdot H_0) - \nabla \times J \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1.15) \quad c := n \times J, \quad \gamma_2 := n \cdot H_0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(1.16) \quad H_1 := -\frac{1}{\mu} \nabla \times E_0 \quad \text{in } \bar{\Omega}$$

(vgl. [9], Lemma 2.2 und 2.3). Läßt man beliebige Anregungen  $J_1, J_2$  und beliebige Rand- und Anfangswerte zu, so erhält man zusätzliche Lösungen von (1.5)–(1.7) bzw. (1.8)–(1.10), die nicht aus elektromagnetischen Wellen hervorgehen. Zur besseren Unterscheidung wollen wir die Lösungen von (1.5)–(1.7) für beliebige Daten als **elektrische Wellen**, die Lösungen von (1.8)–(1.10) für beliebige Daten als **magnetische Wellen** bezeichnen.<sup>2</sup>

Unter der naheliegenden Voraussetzung, daß die Anregung J und die Anfangsdaten in einer Umgebung des Randes  $\partial\Omega$  verschwinden, vereinfachen sich die Gleichungen (1.6) und (1.9) zu den sogenannten **elektrischen Randbedingungen**

$$(1.17) \quad n \times E = 0, \quad \nabla \cdot E = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und **magnetischen Randbedingungen**

$$(1.18) \quad n \times (\nabla \times H) = 0, \quad n \cdot H = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Anfangs- und Randwertprobleme (1.5), (1.17), (1.7) und (1.8), (1.18), (1.10) können mit spektraltheoretischen Methoden diskutiert werden. Ausgangspunkt hierfür sind die **selbstadjungierten Erweiterungen**  $A$  und  $A'$  des vektoriiellen Laplace-Operators zu elektrischen bzw. magnetischen Randbedingungen. Nach [9], Abschnitt 3 gilt

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(A) &:= \{E \in V \mid \Delta E \in L_2(\Omega) \text{ und } (\Delta E, F) = (E, \Delta F) \forall F \in S\}, \\ A E &:= -\Delta E \quad \text{für } E \in \mathcal{D}(A) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} V &:= \bar{S} \quad \text{in } \mathbf{H}_1(\Omega), \\ S &:= \{E \in \mathbf{C}^2(\bar{\Omega}) \mid n \times E = 0 \text{ und } \nabla \cdot E = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \\ &\quad E, \partial_i E, \partial_i \partial_k E = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } r = |x| \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Der Unterschied zwischen *elektrischen* bzw. *magnetischen* Wellen einerseits und *elektromagnetischen* Wellen andererseits wirkt sich insbesondere in der Niederfrequenzasymptotik aus. Dort treten bei ersteren Resonanzen auf, bei elektromagnetischen Wellen jedoch nicht (vgl. [12]).

Analog gilt

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(A') &:= \{H \in V' \mid \Delta H \in L_2(\Omega) \text{ und } (\Delta H, F) = (H, \Delta F) \forall F \in S'\}, \\ A'H &:= -\Delta H \quad \text{für } H \in \mathcal{D}(A') \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} V' &:= \overline{S'} \quad \text{in } \mathbf{H}_1(\Omega), \\ S' &:= \{H \in C^2(\overline{\Omega}) \mid n \times (\nabla \times H) = 0 \text{ und } n \cdot H = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \\ &\quad H, \partial_i H, \partial_i \partial_k H = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } r = |x| \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Der skalare Lebesgue-Raum  $L_2(\Omega)$  und der Sobolev-Raum  $H_1(\Omega)$  sind distributionentheoretisch im Sinn von [8] zu verstehen:

$$\begin{aligned} L_2(\Omega) &:= \{F : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ (linear)} \mid \|F\| < \infty\}, \\ \|F\| &:= \sup\{|F\varphi| \mid \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega |\varphi|^2 dx = 1\}, \\ H_1(\Omega) &:= \{F \in L_2(\Omega) \mid \partial_i F \in L_2(\Omega) \text{ für } i = 1, 2, 3\}, \\ \|F\|_1^2 &:= \|F\|^2 + \sum_{i=1}^3 \|\partial_i F\|^2. \end{aligned}$$

Mit  $(\cdot, \cdot)$  bezeichnen wir die stetige Fortsetzung des üblichen Skalarprodukts in  $C_0^\infty(\Omega)$  auf  $L_2(\Omega)$ . Der vektorielle Lebesgue- und Sobolev-Raum sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2(\Omega) &:= L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \\ \mathbf{H}_1(\Omega) &:= H_1(\Omega) \times H_1(\Omega) \times H_1(\Omega) \end{aligned}$$

gegeben. Für  $E = (E_1, E_2, E_3), F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$  ist das Skalarprodukt durch

$$(E, F) := (E_1, F_1) + (E_2, F_2) + (E_3, F_3)$$

definiert. Für Räume stetiger Funktionen schreiben wir analog  $\mathbf{C}^2(\Omega) := C^2(\Omega) \times C^2(\Omega) \times C^2(\Omega)$  usw.

Mit Hilfe der selbstadjungierten Operatoren  $A$  und  $A'$  lassen sich **schwache** Versionen der Anfangs- und Randwertprobleme angeben: Gesucht sind  $L_2(\Omega)$ -wertige Funktionen  $E$  bzw.  $H$  mit

$$\begin{aligned} E &\in C^2([0, \infty), \mathbf{L}_2(\Omega)), \\ A E + \epsilon\mu E'' + \mu\sigma E' + J_1 &= 0 \quad \text{für } t \geq 0, \\ E(t) \in \mathcal{D}(A) &\quad \text{für } t \geq 0, \\ E(0) = E_0, \quad E'(0) &= E_1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} H &\in C^2([0, \infty), \mathbf{L}_2(\Omega)), \\ A' H + \epsilon\mu H'' + \mu\sigma H' + J_2 &= 0 \quad \text{für } t \geq 0, \\ H(t) \in \mathcal{D}(A') &\quad \text{für } t \geq 0, \\ H(0) = H_0, \quad H'(0) &= H_1. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser schwachen Probleme können explizit als Integrale über die Spektralscharen von  $A$  bzw.  $A'$  angegeben werden ([9], Kapitel 7). Mit Hilfe der elliptischen Regularitätstheorie läßt sich zeigen, daß die schwachen Lösungen für hinreichend glatte Anfangsdaten und Anregungen  $J_1, J_2$  auch Lösungen der klassischen Rand- und Anfangswertprobleme sind (siehe [10], Satz 8.1 für  $m = 1$  und  $n = 2$  sowie die darauffolgenden Bemerkungen). Insbesondere gilt in diesem Fall  $E, H \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ .

Die **Spektralscharen**  $\{P_\lambda\}$  von  $A$  und  $\{P'_\lambda\}$  von  $A'$  lassen sich mit Hilfe der **Resolventen**

$$R_z F := (A - zI)^{-1} F \quad \text{bzw.} \quad R'_z F := (A' - zI)^{-1} F$$

bestimmen. Das **Spektrum** von  $A$ ,

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid (A - zI)^{-1} : \mathbf{L}_2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(A) \text{ existiert und ist beschränkt}\},$$

besteht nach [11], Satz 4.1(a) aus dem einzigen Eigenwert  $z = 0$  und dem kontinuierlichen Anteil  $\sigma(A) = [0, \infty)$ . Für  $F \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$  mit beschränktem Träger<sup>3</sup> und  $z \notin \sigma(A)$  gilt nach [11], Lemma 4.3

$$E := R_z F \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$$

und  $E$  ist Lösung des Randwertproblems

$$(1.21) \quad \Delta E + \kappa^2 E = -F \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1.22) \quad n \times E = 0, \quad \nabla \cdot E = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(1.23) \quad E = O(r^{-1}), \quad (\partial_r - i\kappa)E = o(r^{-1}) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty$$

mit  $\kappa^2 = z$ ,  $\text{Im } \kappa > 0$ . Gleichung (1.23) besagt, daß  $E$  komponentenweise die **Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung** erfüllt.<sup>4</sup> Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte<sup>5</sup> Lösung  $E$  von (1.21)–(1.23) für gegebenes  $\kappa \neq 0$ ,  $\text{Im } \kappa \geq 0$  mit  $E_\kappa[F]$ . Insbesondere gilt

$$(1.24) \quad R_{\kappa^2} F = E_\kappa[F] \quad \text{für } \text{Im } \kappa > 0.$$

Der **Nullraum**  $\mathcal{N}(A)$  besteht nach [11], Satz 2.1 aus den **Dirichletfeldern** in  $\Omega$ :

$$(1.25) \quad \mathcal{N}(A) = \{E \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}) \mid \nabla \times E = 0, \nabla \cdot E = 0 \text{ in } \Omega; \quad n \times E = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \\ E = O(r^{-2}) \text{ für } r = |x| \rightarrow \infty\};$$

ferner gilt

$$(1.26) \quad \dim \mathcal{N}(A) = n.$$

Nach der Regularitätstheorie gilt  $P_\lambda F \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$  für jedes  $F \in \mathbf{L}_2(\Omega)$  ([11], Lemma 4.1 für  $j = 1$ ). Mit Hilfe von (1.24), der analytischen Abhängigkeit von  $E_\kappa[F]$  von  $\kappa$  in  $\{\kappa \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \kappa \geq 0, \kappa \neq 0\}$  (vgl. [7] und [11]) und dem bekannten spektraltheoretischen Zusammenhang zwischen Resolvente und Spektralschar läßt sich  $P_\lambda F$  für  $F \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$  durch die Lösung  $E_\kappa[F]$  von (1.21)–(1.23) für reelles  $\kappa$  und die Felder des Nullraums  $\mathcal{N}(A)$  darstellen. Für  $F \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$  mit beschränktem Träger,  $\lambda > 0$  und  $x \in \overline{\Omega}$  gilt

$$(1.27) \quad \frac{d}{d\lambda} (P_\lambda F)(x) = \frac{1}{2\pi i} (E_{\sqrt{\lambda}}[F](x) - E_{-\sqrt{\lambda}}[F](x))$$

<sup>3</sup>Der **Träger**, engl. *support*, einer Funktion  $f$  ist gegeben durch  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ .

<sup>4</sup>Die zweite Abschätzung ist dabei nur für reelles  $\kappa \neq 0$  relevant, während sie im Fall  $\text{Im } \kappa > 0$  aus der ersten Abschätzung gefolgert werden kann.

<sup>5</sup>[11], Lemma 4.2

und unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\mathbf{n} \times \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  auf  $\partial\Omega$ :

$$(1.28) \quad (P_\lambda F)(\mathbf{x}) = (P_{+0} F)(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\lambda (E_{\sqrt{\sigma}}[F](\mathbf{x}) - E_{-\sqrt{\sigma}}[F](\mathbf{x})) d\sigma,$$

wobei  $P_{+0}$  die Projektion auf  $\mathcal{N}(A)$  ist. Das uneigentliche Integral konvergiert hierbei gleichmäßig bezüglich  $\mathbf{x}$  in jeder beschränkten Teilmenge von  $\bar{\Omega}$  ([11], Satz 4.1). Nach [11], Satz 5.1 gelten analoge Aussagen für die Spektralschar  $\{P'_\lambda\}$  von  $A'$ . Nach [11], Satz 3.1 besteht der Nullraum  $\mathcal{N}(A')$  aus den **Neumannfeldern** in  $\Omega$ :

$$(1.29) \quad \mathcal{N}(A') = \{H \in \mathbf{C}^2(\bar{\Omega}) \mid \nabla \times H = 0, \nabla \cdot H = 0 \text{ in } \Omega; \quad \mathbf{n} \cdot H = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \\ H = O(r^{-2}) \text{ für } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty\};$$

ferner gilt

$$(1.30) \quad \dim \mathcal{N}(A') = p.$$

Die Formeln (1.27) und (1.28) bleiben auch im magnetischen Fall gültig, wenn man  $P_{+0}$  durch die Projektion  $P'_{+0}$  auf den Nullraum  $\mathcal{N}(A')$  und  $E_\kappa[F]$  durch die in  $\{\kappa \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \kappa \geq 0, \kappa \neq 0\}$  analytisch von  $\kappa$  abhängende Lösung des Randwertproblems

$$(1.31) \quad \Delta H + \kappa^2 H = -F \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1.32) \quad \mathbf{n} \times (\nabla \times H) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot H = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(1.33) \quad H = O(r^{-1}), \quad (\partial_r - i\kappa)H = o(r^{-1}) \quad \text{für } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

ersetzt, die wir mit  $H_\kappa[F]$  bezeichnen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Verhaltens von  $E_\kappa[F]$  für  $\kappa \rightarrow 0$ . Hierzu knüpfen wir an die Voruntersuchungen von Werner in [12] an. In [12] wurde gezeigt, daß sich  $E_\kappa[F]$  meromorph auf die ganze komplexe Ebene fortsetzen läßt und daß die asymptotische Relation

$$(1.34) \quad E_\kappa[F] = -\frac{1}{\kappa^2} P_{+0} F + \frac{1}{\kappa} C_{-1}[F] + C_0[F] + O(|\kappa|) \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0$$

gleichmäßig in kompakten Teilmengen von  $\Omega$  gilt, wobei  $C_{-1}[F]$  und  $C_0[F]$  Lösungen von Randwertproblemen für die Gleichungen  $\Delta E = 0$  bzw.  $\Delta E = P_{+0} F - F$  mit elektrischen Randbedingungen sind. In [12] fehlen allerdings weitere Aussagen, die zu einer eindeutigen Charakterisierung von  $C_{-1}[F]$  und  $C_0[F]$  erforderlich wären. Es konnte lediglich die Implikation

$$(1.35) \quad P_{+0} F = 0 \implies C_{-1}[F] = 0$$

gezeigt werden ([12], 124). Wie in [12] gezeigt, genügen (1.35) und eine analoge Implikation im Fall magnetischer Randbedingungen zu einer adäquaten Diskussion des asymptotischen Verhaltens der Lösung  $(E, H)$  des elektromagnetischen Problems (1.1)–(1.4) mit vorgegebener zeitharmonischer Stromdichteverteilung  $J$  für  $t \rightarrow \infty$ . Insbesondere zeigt es sich, daß  $(E, H)$  für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt (vgl. [12], Satz 4.1). Im allgemeinen Fall des elektrischen Problems (1.5)–(1.7) mit zeitharmonischer Anregung  $J_1(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  tritt dagegen in der Asymptotik der Lösung  $E(\mathbf{x}, t)$  der linear mit  $t$  wachsende Term  $tE^{(1)}$  mit  $E^{(1)} = \frac{1}{\epsilon\mu} P_{+0} \left( \frac{1}{i\omega\epsilon} F + E_1 \right)$  auf; der zweite Term in der asymptotischen Entwicklung von  $E(\mathbf{x}, t)$  für  $t \rightarrow \infty$  besitzt die Ordnung  $O(1)$  und läßt sich explizit auf  $C_{-1} \left[ \frac{1}{i\omega\epsilon} F + E_1 \right]$  zurückführen (vgl. [12], Satz 3.1). In der vorliegenden Arbeit soll nun die Abschätzung (1.34) auf direktem Weg über Fredholmsche Randintegralgleichungen gewonnen und durch explizite Berechnung des **Residuums**  $C_{-1}[F]$

verschärft werden. Hiermit ergibt sich auch eine Verschärfung der Asymptotik von  $E(x, t)$  für  $t \rightarrow \infty$  durch genaue Angabe des zweiten Terms der Ordnung  $O(1)$ . Ferner ergänzen wir die Untersuchung in [12] durch die Einbeziehung des mathematisch besonders interessanten Falls  $\omega = 0$  (zeitunabhängige Anregung  $J_1$ ).

Es ist geplant, in einer anschließenden Untersuchung auch die Asymptotik der Lösung  $H(x, t)$  des magnetischen Problems (1.8)–(1.10) nach ähnlichen Gesichtspunkten zu diskutieren. Darüberhinaus ist zu erwarten, daß sich die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden vorteilhaft auf eine Reihe weiterer Probleme der Wellenmechanik und der Elektrodynamik anwenden lassen.

Ich danke Herrn Prof. Werner für die interessante Aufgabenstellung und seine geduldige Betreuung.



## 2 Rückführung auf Integralgleichungen

### 2.1 Potentialfelder und Sprungbedingungen

Das Randwertproblem für die Helmholtzgleichung unter elektrischen bzw. magnetischen Randbedingungen wird in der Literatur mit verschiedenen Potentialansätzen behandelt.<sup>1</sup> Die vorliegende Arbeit hält sich der Übersichtlichkeit halber sehr eng an den in [1] diskutierten Ansatz.<sup>2</sup> Die in diesem Kapitel eingeführten Bezeichnungen und Definitionen entsprechen weitgehend den dort verwendeten Bezeichnungen. Ausgangspunkt für alle Potentialansätze ist die **Grundlösung** der Helmholtzgleichung

$$(2.1) \quad \phi_\kappa(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y,$$

die sich im potentialtheoretischen Fall  $\kappa = 0$  zu

$$(2.2) \quad \phi_0(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

spezialisiert.

#### 2.1.1 Flächenpotentiale

Wir betrachten Flächenpotentiale, die von Oberflächenbelegungen auf  $\partial\Omega$  erzeugt werden. Für solche Belegungen benötigen wir den Raum  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  der **hölderstetigen Funktionen**

$$(2.3) \quad C^{0,\alpha}(\partial\Omega) := \{ \varphi \in C(\partial\Omega) \mid |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in \partial\Omega, x \neq y \},$$

$$(2.4) \quad \|\varphi\|_\alpha := \max_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \partial\Omega \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

den Raum  $\mathbf{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  der **hölderstetigen Vektorfelder**

$$(2.5) \quad \mathbf{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega) := C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \times C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \times C^{0,\alpha}(\partial\Omega),$$

$$(2.6) \quad \|a\|_\alpha := \|a_1\|_\alpha + \|a_2\|_\alpha + \|a_3\|_\alpha \quad \text{für } a \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$$

und den Raum  $\mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  der **hölderstetigen Tangentialfelder**

$$(2.7) \quad \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega) := \{ a \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \mid n \cdot a = 0 \}$$

mit  $0 < \alpha < 1$ .  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $\mathbf{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  sind mit den angegebenen Normen **Banachräume** ([1], Satz 2.4). Das (einfache) **Potential**  $u(x)$  einer Flächendichte  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  wird definiert durch

$$(2.8) \quad u(x) := \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(x, y) \varphi(y) dF_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega,$$

<sup>1</sup>siehe etwa [1], [2] oder [7]

<sup>2</sup>Werner hat diesen Ansatz in [7] um ein Volumenpotential erweitert und damit Randintegralgleichungen erhalten, die für alle  $\kappa \in (0, \infty)$  eindeutig lösbar sind. Der Ansatz aus [1] hingegen führt für abzählbar viele reelle Eigenwerte  $\kappa$  zu nicht eindeutig lösbaren Integralgleichungen. Da sich diese Eigenwerte jedoch bei 0 nicht häufen, spielen sie für die hier betrachtete Niederfrequenzasymptotik keine Rolle.

das **Vektorpotential**  $A(x)$  einer vektoriellen Flächendichte  $a \in C(\partial\Omega)$  durch

$$(2.9) \quad A(x) := \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(x, y) a(y) dF_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega.$$

Für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$  darf in (2.8) und (2.9) unter dem Integralzeichen differenziert werden. Aus der Analytizität von  $\phi_\kappa(x, y)$  für  $x \neq y$  folgt sofort  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$  und  $A \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ . Die folgenden beiden Lemmata geben Stetigkeits- und Sprungbedingungen für Flächenpotentiale an der Randfläche  $\partial\Omega$  an.

**Lemma 2.1.** *Das Potential  $u(x)$  einer Dichte  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  ist gleichmäßig hölderstetig in  $\mathbb{R}^3$  mit beliebigem Hölder-Exponent  $0 < \alpha < 1$ . Gilt sogar  $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ , so lassen sich die ersten Ableitungen von  $u(x)$  jeweils hölderstetig mit dem gleichen Hölder-Exponent  $\alpha$  von  $\Omega$  auf  $\overline{\Omega}$  und von  $D$  auf  $\overline{D}$  fortsetzen. Diese Fortsetzungen werden mit  $u_+$  und  $u_-$  bezeichnet, d.h.  $\partial_{x_i} u_+ \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  und  $\partial_{x_i} u_- \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ . Für  $x \in \partial\Omega$  gilt die Sprungbedingung*

$$(2.10) \quad \nabla u_\pm(x) = \int_{\partial\Omega} \nabla_x \phi_\kappa(x, y) \varphi(y) dF_y \mp \frac{1}{2} n_x \varphi(x).$$

*Beweis.* [1], Satz 2.12 und Satz 2.17. □

**Lemma 2.2.** *Das Vektorpotential  $A(x)$  einer vektoriellen Dichte  $a \in C(\partial\Omega)$  ist gleichmäßig hölderstetig in  $\mathbb{R}^3$  mit beliebigem Hölder-Exponent  $0 < \alpha < 1$ . Gilt sogar  $a \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ , so lassen sich die ersten Ableitungen von  $A(x)$  jeweils hölderstetig mit dem gleichen Hölder-Exponent  $\alpha$  von  $\Omega$  auf  $\overline{\Omega}$  und von  $D$  auf  $\overline{D}$  fortsetzen; die Fortsetzungen werden mit  $A_+$  und  $A_-$  bezeichnet. Für  $x \in \partial\Omega$  gelten die Sprungbedingungen*

$$(2.11) \quad \nabla \times A_\pm(x) = \int_{\partial\Omega} \nabla_x \times (\phi_\kappa(x, y) a(y)) dF_y \mp \frac{1}{2} n_x \times a(x),$$

$$(2.12) \quad \nabla \cdot A_\pm(x) = \int_{\partial\Omega} \nabla_x \cdot (\phi_\kappa(x, y) a(y)) dF_y \mp \frac{1}{2} n_x \cdot a(x).$$

*Beweis.* Folgt sofort durch Anwendung von Lemma 2.1 auf die Komponenten von  $A$ . □

### 2.1.2 Volumenpotentiale

Ein **Volumenpotential**  $E(x)$  wird von einer stetigen Raumdichte  $f \in C(\overline{G})$  erzeugt, wobei  $G = D$  oder  $G = \Omega$  zu setzen ist:

$$(2.13) \quad E(x) := \int_G \phi_\kappa(x, y) f(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3.$$

Im Fall  $G = \Omega$  soll der Träger  $\text{supp}(f)$  beschränkt sein.

**Lemma 2.3.** *Sei  $E(x)$  das Volumenpotential einer Raumdichte  $f \in C(\overline{G})$  für  $G = D$  oder  $G = \Omega$ . Im Fall  $G = \Omega$  sei  $\text{supp}(f)$  beschränkt. Dann ist  $E$  in  $\mathbb{R}^3$  gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit beliebigem Hölder-Exponent  $0 < \alpha < 1$ . Ist  $f$  zusätzlich hölderstetig in  $G$ , so ist  $E$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial G$  zweimal stetig differenzierbar und Lösung der Helmholtzgleichung*

$$\begin{aligned} \Delta E + \kappa^2 E &= -f & \text{in } G \\ \Delta E + \kappa^2 E &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die letzte Gleichung ergibt sich für eine beliebige Raumdichte  $f \in C(\overline{G})$  sofort aus (2.13), da für  $x \notin \overline{G}$  unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Im Fall  $G = D$  folgen die restlichen Behauptungen durch Anwendung von [6], Lemma 8 und Lemma 9 auf die Komponenten  $D_i$  von  $D$ . Im Fall  $G = \Omega$  wende man die genannten Lemmata auf das von  $n + 1$  geschlossenen Flächen berandete Gebiet  $\Omega_R := \Omega \cap K(0, R)$  ( $K(0, R) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$ ) an,<sup>3</sup> wobei  $R$  so groß zu wählen ist, daß  $D \subseteq K(0, R)$  und  $\text{supp}(f) \subseteq K(0, R)$  gilt. Für  $R \rightarrow \infty$  ergeben sich die Behauptungen.  $\square$

## 2.2 Das elektrische Randwertproblem

Für die Formulierung des Randwertproblems führen wir zunächst gemäß [1] den Funktionenraum

$$(2.14) \quad \mathcal{F}(\Omega) := \{E : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^3 \mid E \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}); \nabla \cdot E, \nabla \times E \in C(\overline{\Omega})\}$$

ein. Die Stetigkeitseigenschaften in (2.14) genügen, um die vektoriellen Greenschen Formeln in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$  anwenden zu können ([1], 117). Wir wollen nun für fest gewähltes  $F \in C^2(\overline{\Omega})$  mit beschränktem Träger die Lösung  $E_\kappa[F]$  von (1.21)–(1.23) in der Form

$$(2.15) \quad E_\kappa[F] = E_\kappa^0 + E'_\kappa$$

mit

$$(2.16) \quad E_\kappa^0 := \int_{\Omega} \phi_\kappa(x, y) F(y) dy$$

darstellen.  $E_\kappa^0$  ist dabei als „einlaufende Welle“ anzusehen, das Korrekturfeld  $E'_\kappa$  als „reflektierte Welle.“ Da  $E_\kappa^0$  ein Volumenpotential im Sinn von Abschnitt 2.1 ist, gilt nach Lemma 2.3:

$$\begin{aligned} E_\kappa^0 &\in \mathcal{F}(\Omega), \\ \Delta E_\kappa^0 + \kappa^2 E_\kappa^0 &= -F \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß  $E_\kappa^0$  für  $\text{Im } \kappa \geq 0$  auch der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt. Um die Randbedingungen (1.22) zu erfüllen, muß  $E'_\kappa$  also das folgende Randwertproblem lösen.

**Definition 2.1** (Elektrisches Randwertproblem (ERP)). *Gesucht ist ein  $E'_\kappa \in \mathcal{F}(\Omega)$  mit den Eigenschaften*

$$(2.17) \quad \Delta E'_\kappa + \kappa^2 E'_\kappa = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.18) \quad n \times E'_\kappa = c_\kappa := -n \times E_\kappa^0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

$$(2.19) \quad \nabla \cdot E'_\kappa = \gamma_\kappa := -\nabla \cdot E_\kappa^0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

$$(2.20) \quad E'_\kappa = O(r^{-1}), \quad (\partial_r - i\kappa)E'_\kappa = o(r^{-1}) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty$$

Es gilt:

**Satz 2.1.** *Das ERP besitzt für  $\kappa \neq 0$ ,  $\text{Im } \kappa \geq 0$  eine eindeutige Lösung  $E'_\kappa$ .  $E_\kappa^0 + E'_\kappa$  ist Lösung des Randwertproblems (1.21)–(1.23). Ferner gilt*

$$E_\kappa^0 + E'_\kappa = E_\kappa[F] \in C^2(\overline{\Omega}).$$

*Die vorgegebenen Randwerte sind hölderstetig, d.h.  $c_\kappa \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\gamma_\kappa \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ .*

<sup>3</sup>In [6] sind diese Lemmata für ein von einer geschlossenen Fläche berandetes Gebiet  $G_i$  formuliert; der Beweis läßt sich jedoch ohne weiteres auf ein von mehreren geschlossenen Flächen berandetes Gebiet verallgemeinern.

*Beweis.* Wir beginnen mit der letzten Behauptung. Nach Lemma 2.3 ist das Volumenpotential  $E_\kappa^0$  gleichmäßig hölderstetig differenzierbar. Hieraus folgt sofort  $c_\kappa \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\gamma_\kappa \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  für jedes  $\alpha \in (0, 1)$ . Das ERP entspricht somit im wesentlichen dem „Exterior Electric Boundary-Value Problem“ von Colton/Kress ([1], 122). Colton/Kress verwenden anstelle von (2.20) die Ausstrahlungsbedingung [1], (4.15). Diese ist jedoch nach [1], Korollar 4.14 für Lösungen der Helmholtzgleichung (2.17) zu der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (2.20) äquivalent. Die zusätzliche Voraussetzung in [1],<sup>4</sup> daß  $\nabla_0 \cdot c_\kappa$  hölderstetig ist,<sup>5</sup> ist wegen

$$\nabla_0 \cdot c_\kappa = -\nabla_0 \cdot (\mathbf{n} \times E_\kappa^0) \stackrel{[1], (2.75)}{=} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times E_\kappa^0)$$

und Lemma 2.3 erfüllt. [1], Satz 4.31 besagt nun, daß das ERP für  $\kappa \neq 0$ ,  $\text{Im } \kappa \geq 0$  eine eindeutige Lösung  $E'_\kappa$  in  $\mathcal{F}(\Omega)$  besitzt. Mit

$$E_\kappa[F] = E_\kappa^0 + E'_\kappa$$

erhalten wir somit die (eindeutig bestimmte) zu  $\mathcal{F}(\Omega)$  gehörende Lösung von (1.21)–(1.23). Wegen  $\partial\Omega \in C^6$ ,  $F \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\text{supp}(F)$  beschränkt folgt aus [11], Lemma 2.1, daß  $E_\kappa[F]$  sogar zu  $C^2(\overline{\Omega})$  gehört.  $\square$

### 2.3 Das magnetische Randwertproblem

Analog läßt sich das Außenraumproblem für die Helmholtzgleichung (1.31)–(1.33) zu magnetischen Randbedingungen behandeln. Wir stellen hierzu für festes  $F \in C^2(\overline{\Omega})$  mit beschränktem Träger die Lösung  $H_\kappa[F]$  der Helmholtzgleichung in der Form

$$(2.21) \quad H_\kappa[F] = H_\kappa^0 + H'_\kappa$$

mit

$$(2.22) \quad H_\kappa^0 := \int_{\Omega} \phi_\kappa(x, y) F(y) \, dy$$

dar. Dieser Ansatz führt auf das magnetische Randwertproblem:

**Definition 2.2** (Magnetisches Randwertproblem (MRP)). *Gesucht ist ein  $H'_\kappa \in \mathcal{F}(\Omega)$  mit den folgenden Eigenschaften:*

$$(2.23) \quad \Delta H'_\kappa + \kappa^2 H'_\kappa = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.24) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\nabla \times H'_\kappa)) = \mathbf{d}_\kappa := -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\nabla \times H_\kappa^0)) \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(2.25) \quad \mathbf{n} \cdot H'_\kappa = \delta_\kappa := -\mathbf{n} \cdot H_\kappa^0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(2.26) \quad H'_\kappa = O(r^{-1}), \quad (\partial_r - i\kappa)H'_\kappa = o(r^{-1}) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty.$$

Wie im vorigen Abschnitt erhalten wir mit Hilfe von [1], Satz 4.35 und [11], Lemma 3.1 den

**Satz 2.2.** *Das MRP besitzt für  $\kappa \neq 0$ ,  $\text{Im } \kappa \geq 0$  eine eindeutige Lösung  $H'_\kappa$ .  $H_\kappa^0 + H'_\kappa$  ist Lösung der Helmholtzgleichung unter magnetischen Randbedingungen (1.31)–(1.33). Ferner gilt*

$$H_\kappa^0 + H'_\kappa = H_\kappa[F] \in C^2(\overline{\Omega})$$

*Die vorgegebenen Randwerte sind hölderstetig, d.h.  $\mathbf{d}_\kappa \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\delta_\kappa \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ .*

<sup>4</sup>siehe hierzu die Definition von  $\mathcal{S}^{0,\alpha}(\partial D)$  ([1], 63)

<sup>5</sup> $\nabla_0 \cdot c_\kappa$  bezeichnet die **Oberflächendivergenz**. In [1] wird hierfür die Bezeichnung  $\text{Div } c_\kappa$  verwendet. Zur Definition der Oberflächendivergenz siehe [1], Definition 2.28.

## 2.4 Innenprodukt und adjungierte Integraloperatoren

Unter einem **Innenprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf einem normierten Raum  $X$  verstehen wir eine symmetrische, nicht entartete Bilinearform<sup>6</sup> auf  $X$ , d.h. eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \\ \langle x + z, y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

für  $x, y, z \in X$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  und

$$\forall x \in X \quad \exists y \in X : \quad \langle x, y \rangle \neq 0.$$

Wir nennen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  **stetig**, wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß

$$|\langle x, y \rangle| \leq C \|x\| \|y\|$$

für alle  $x, y \in X$  gilt. Wir führen ein Innenprodukt auf  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  ein durch die Definition

$$(2.27) \quad \langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial\Omega} \varphi \psi \, dF \quad \text{für } \varphi, \psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega).$$

Das durch (2.27) gegebene Innenprodukt ist stetig (bezüglich der Höldernorm auf  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ), da

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle| &= \left| \int_{\partial\Omega} \varphi \psi \, dF \right| \leq \int_{\partial\Omega} |\varphi \psi| \, dF \\ &\leq \left( \max_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)| \right) \left( \max_{x \in \partial\Omega} |\psi(x)| \right) |\partial\Omega| \\ &\leq \|\varphi\|_{\alpha} \|\psi\|_{\alpha} |\partial\Omega| \end{aligned}$$

wobei  $|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} dF$  den Flächeninhalt des Randes  $\partial\Omega$  bezeichnet. Entsprechend wird das Innenprodukt auf  $\mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  erklärt:

$$\langle a, b \rangle := \int_{\partial\Omega} a \cdot b \, dF \quad \text{für } a, b \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß alle folgenden Betrachtungen auch mit dem **Skalarprodukt**  $\int_{\partial\Omega} \varphi \bar{\psi} \, dF$ , d.h. einer positiv definiten Sesquilinearform anstelle einer Bilinearform, durchgeführt werden können, was an einigen Stellen Voraussetzungen und Darstellung vereinfachen würde. Wir halten uns jedoch an den in [1] eingeschlagenen Weg, um die Definitionen der folgenden Integraloperatoren und die entsprechenden Sätze und Lemmata ohne Änderungen übernehmen zu können.

Wir geben nun die Definitionen der für unseren Ansatz wichtigen Integraloperatoren aus [1] an. Zunächst definieren wir für  $\varphi, \psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$

$$(2.28) \quad (\mathbf{K}_{\kappa} \psi)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_{\kappa}(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) \, dF_y,$$

$$(2.29) \quad (\mathbf{K}'_{\kappa} \varphi)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_{\kappa}(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) \, dF_y$$

<sup>6</sup>vgl. [1], Definition 1.22

und für  $a \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$

$$(2.30) \quad (\mathbf{S}_\kappa a)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(x, y) a(y) dF_y$$

jeweils für  $x \in \partial\Omega$ . Für  $a, b \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $x \in \partial\Omega$  setzen wir:

$$(2.31) \quad (\mathbf{M}_\kappa a)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_x \times (\nabla_x \times [\phi_\kappa(x, y) a(y)]) dF_y,$$

$$(2.32) \quad \mathbf{M}'_\kappa b := \mathbf{n} \times \mathbf{M}_\kappa[\mathbf{n} \times b]$$

oder ausführlich

$$(\mathbf{M}'_\kappa b)(x) = 2 \mathbf{n}_x \times \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_x \times (\nabla_x \times [\phi_\kappa(x, y)(\mathbf{n}_y \times b(y))]) dF_y.$$

**Lemma 2.4.** Die Operatoren  $\mathbf{K}_\kappa$  und  $\mathbf{K}'_\kappa$  bilden  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  in sich ab. Der Operator  $\mathbf{S}_\kappa$  bildet  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  in sich ab. Alle drei Operatoren sind **kompakt** für alle  $\kappa \in \mathbb{C}$ .  $\mathbf{K}_\kappa$  und  $\mathbf{K}'_\kappa$  sind bezüglich des Innenprodukts (2.27) zueinander **adjungiert**,  $\mathbf{S}_\kappa$  ist **selbstadjungiert**. In Formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\kappa, \mathbf{K}'_\kappa : C^{0,\alpha}(\partial\Omega) &\longrightarrow C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \quad \text{kompakt,} \\ \langle \mathbf{K}_\kappa \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, \mathbf{K}'_\kappa \psi \rangle, \\ \mathbf{S}_\kappa : C^{0,\alpha}(\partial\Omega) &\longrightarrow C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \quad \text{kompakt,} \\ \langle \mathbf{S}_\kappa a, b \rangle &= \langle a, \mathbf{S}_\kappa b \rangle \end{aligned}$$

für alle  $\varphi, \psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und alle  $a, b \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ .

*Beweis.* [1], Satz 2.30 und die vorhergehende Bemerkung für die Aussagen über  $\mathbf{K}_\kappa$  und  $\mathbf{K}'_\kappa$ . [1], Bemerkung nach Formel (2.80) für die entsprechenden Aussagen über  $\mathbf{S}_\kappa$ , wobei  $\mathbf{S}_\kappa$  komponentenweise auf das Vektorfeld  $a$  anzuwenden ist. Colton/Kress machen dabei die für das ERP und das MRP praktische Einschränkung  $\text{Im } \kappa \geq 0$ . Die zitierten Beweise beruhen jedoch auf Abschätzungen, die auch für  $\text{Im } \kappa < 0$  richtig bleiben.  $\square$

**Lemma 2.5.** Die Operatoren  $\mathbf{M}_\kappa$  und  $\mathbf{M}'_\kappa$  bilden  $\mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  in sich ab. Sie sind **kompakt** für alle  $\kappa \in \mathbb{C}$ .  $\mathbf{M}_\kappa$  und  $\mathbf{M}'_\kappa$  sind zueinander **adjungiert**. In Formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\kappa, \mathbf{M}'_\kappa : \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega) &\longrightarrow \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \quad \text{kompakt,} \\ \langle \mathbf{M}_\kappa a, b \rangle &= \langle a, \mathbf{M}'_\kappa b \rangle \end{aligned}$$

für alle  $a, b \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ .

*Beweis.* [1], Satz 2.32 und die vorausgehende Bemerkung.  $\square$

Nach den Lemmata 2.4 und 2.5 erfüllen die Operatoren  $\mathbf{S}_\kappa$ ,  $\mathbf{K}_\kappa$  und  $\mathbf{K}'_\kappa$ , sowie  $\mathbf{M}_\kappa$  und  $\mathbf{M}'_\kappa$  die Voraussetzungen der **Fredholmschen Sätze** [1], Satz 1.28 und Satz 1.29. Insbesondere gilt folglich

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\kappa) &< \infty, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\kappa) &= \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_\kappa) < \infty, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{M}_\kappa) &= \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{M}'_\kappa) < \infty. \end{aligned}$$

Nach der zweiten Fredholmschen Alternative sind darüberhinaus die Einschränkungen

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_\kappa|_{\mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\kappa)^\perp} &: \mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\kappa)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}'_\kappa)^\perp, \\ \mathbf{M}_\kappa|_{\mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{M}_\kappa)^\perp} &: \mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{M}_\kappa)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{M}'_\kappa)^\perp\end{aligned}$$

**bijektiv.** Diese Eigenschaften bilden die Grundlage für die in Kapitel 3 entwickelten Methoden zur Berechnung der Niederfrequenzasymptotik des ERP.  $\mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\kappa)^\perp$  usw. bezeichnen dabei die Orthogonalräume bezüglich des Innenprodukts, also

$$\mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\kappa)^\perp := \{\psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \mid \langle \psi, \varphi \rangle = 0 \text{ für } \forall \varphi \in \mathcal{N}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\kappa)\}.$$

## 2.5 Rückführung auf Randintegralgleichungen

Der Potentialansatz von Colton/Kress für das elektrische und das magnetische Feld setzt sich jeweils aus zwei Potentialfeldern zusammen, die von einer skalaren und einer vektoriellen Oberflächenbelegung erzeugt werden. Für diese zusammengesetzten Oberflächenbelegungen führen wir den Produktraum

$$(2.33) \quad \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) := \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \times C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$$

ein, der mit der Norm

$$(2.34) \quad \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|_\alpha := \max\{\|\mathbf{a}\|_\alpha, \|\lambda\|_\alpha\} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$$

ein Banachraum ist. Das Innenprodukt (2.27) überträgt sich auf  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  durch die Definition

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle &:= \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, dF + \int_{\partial\Omega} \lambda \mu \, dF \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \lambda, \mu \rangle. \end{aligned}$$

Für die Formulierung der Randintegralgleichungen definieren wir lineare Operatoren  $\mathbf{L}_\kappa, \mathbf{L}'_\kappa$  auf  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  durch

$$(2.36) \quad \mathbf{L}_\kappa = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11,\kappa} & \mathbf{L}_{12,\kappa} \\ 0 & \mathbf{L}_{22,\kappa} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}'_\kappa = \begin{pmatrix} \mathbf{L}'_{11,\kappa} & 0 \\ \mathbf{L}'_{21,\kappa} & \mathbf{L}'_{22,\kappa} \end{pmatrix}$$

mit

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}_{11,\kappa} \mathbf{a} &:= \mathbf{M}_\kappa \mathbf{a}, & \mathbf{L}'_{11,\kappa} \mathbf{b} &:= \mathbf{M}'_\kappa \mathbf{b}, \\ \mathbf{L}_{12,\kappa} \lambda &:= -\mathbf{n} \times \mathbf{S}_\kappa [\lambda \mathbf{n}], & \mathbf{L}'_{21,\kappa} \mathbf{b} &:= \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_\kappa [\mathbf{n} \times \mathbf{b}], \\ \mathbf{L}_{22,\kappa} \lambda &:= \mathbf{K}_\kappa \lambda, & \mathbf{L}'_{22,\kappa} \mu &:= \mathbf{K}'_\kappa \mu. \end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung in (2.36) ist so zu verstehen, daß

$$\mathbf{L}_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11,\kappa} & \mathbf{L}_{12,\kappa} \\ 0 & \mathbf{L}_{22,\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11,\kappa} \mathbf{a} + \mathbf{L}_{12,\kappa} \lambda \\ 0 + \mathbf{L}_{22,\kappa} \lambda \end{pmatrix}.$$

**Lemma 2.6.**  $L_\kappa$  und  $L'_\kappa$  sind für alle  $\kappa \in \mathbb{C}$  kompakte, zueinander adjungierte Operatoren von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  in sich. In Formeln:

$$L_\kappa, L'_\kappa : \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \quad \text{kompakt,}$$

$$\langle L_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}, L'_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \rangle$$

für alle  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ .

*Beweis.*  $L_\kappa$  und  $L'_\kappa$  sind kompakt, da nach Abschnitt 2.4 alle Komponenten kompakt sind. Die Adjungiertheit folgt ebenso komponentenweise aus den Lemmata 2.4 und 2.5 sowie für  $L_{12,\kappa}$ ,  $L'_{21,\kappa}$  durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge (siehe [1], 132).  $\square$

**Satz 2.3.** Das für  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\text{Im } \kappa \geq 0$  durch die Gleichung (2.38) gegebene Feld

$$(2.38) \quad \mathbb{E}(\mathbf{x}) := \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a}(\mathbf{y}) \, dF_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \, dF_{\mathbf{y}}$$

löst das ERP, sofern  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix}$  die Integralgleichung

$$(2.39) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} + L_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_\kappa \\ \gamma_\kappa \end{pmatrix}$$

erfüllt.

*Beweis.* [1], Satz 4.21 in Verbindung mit Formel (4.33') ([1], 133).  $\square$

**Bemerkung.**  $\mathbb{E} \in \mathcal{F}(\Omega)$  folgt größtenteils aus den Stetigkeitsaussagen der Lemmata 2.1 und 2.2. Die Hölderstetigkeit von  $\nabla_0 \cdot \mathbf{c}_\kappa$  wird benötigt, um mit Hilfe von [1], Lemma 4.15  $\nabla \times \mathbb{E} \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$  nachzuweisen. Die Äquivalenz von (2.39) zu den Randbedingungen (2.19) folgt aus den Sprungbedingungen für Flächenpotentiale.  $\mathbb{E}$  erfüllt stets die Helmholtzgleichung (2.17), was durch die in  $\Omega$  erlaubte Vertauschung von Differentiation und Integration gezeigt werden kann. Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (2.20) wird nur für  $\text{Im } \kappa \geq 0$  erfüllt.

Wenn später die von verschiedenen Oberflächenbelegungen nach Formel (2.38) erzeugten Potentialfelder nebeneinander betrachtet werden, bezeichnen wir das von einer Belegung  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  erzeugte Feld mit  $\mathbb{E}_\kappa^{(\mathbf{a},\lambda)}$  usw. Anschaulich kann man sich dieses Feld als Überlagerung eines „Wirbelfeldes“ (d.h. eines Rotationsfeldes) und eines „Quellenfeldes“ (d.h. eines Feldes, dessen Divergenz nicht verschwindet) vorstellen:

$$(2.40) \quad \mathbb{E}_\kappa^{(\mathbf{a},\lambda)}(\mathbf{x}) = \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a}(\mathbf{y}) \, dF_{\mathbf{y}}}_{\text{„Wirbelfeld“}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \, dF_{\mathbf{y}}}_{\text{„Quellenfeld“}}.$$

Wie sich später bei der Untersuchung von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  zeigen wird, steuern sowohl das Wirbelfeld wie auch das Quellenfeld Eigenfunktionen zu dem Nullraum bei. Die durch Wirbelfelder erzeugten Eigenfunktionen stehen dabei mit magnetischen Feldern in Verbindung, die von Quellenfeldern erzeugten mit elektrischen Feldern. Der Einfluß der „magnetischen“ Eigenfunktionen auf die Asymptotik für  $\kappa \rightarrow 0$  unterscheidet sich dabei deutlich von dem der „elektrischen“ Eigenfunktionen.

Das MRP läßt sich in analoger Weise mit Hilfe des Operators  $L'_\kappa$  auf eine Randintegralgleichung zurückführen:



**Satz 2.4.** Das für  $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $\text{Im } \kappa \geq 0$  durch die Gleichung (2.41) gegebene Feld

$$(2.41) \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{n}_y \times \mathbf{b}(\mathbf{y})) \, dF_y + \nabla_x \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) \, dF_y$$

löst das MRP, sofern  $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix}$  die Integralgleichung

$$(2.42) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} - \mathbf{L}'_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \mathbf{d}_\kappa \\ \delta_\kappa \end{pmatrix}$$

erfüllt.

*Beweis.* [1], Satz 4.22 in Verbindung mit Formel (4.36'). □

Wie bei dem Potentialansatz für das ERP bezeichnen wir das durch (2.41) gegebene Feld mit  $H_\kappa^{(\mathbf{b}, \mu)}$ . Die Definitionen (2.38) für  $E_\kappa^{(\mathbf{a}, \lambda)}(\mathbf{x})$  und (2.41) für  $H_\kappa^{(\mathbf{b}, \mu)}(\mathbf{x})$  lassen sich auf  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$  erweitern und von dort jeweils stetig auf  $\overline{\Omega}$  und  $\overline{D}$  fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzungen mit  $E_{\kappa,+}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \in C(\overline{D})$ ,  $E_{\kappa,+}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \in C(\overline{\Omega})$  usw. Aus den Sprungbedingungen für Flächenpotentiale folgen die nachstehenden Darstellungen für die Grenzwerte an der äußeren bzw. inneren Seite von  $\partial\Omega$ :

$$(2.43) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times E_{\kappa,+}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \\ \nabla \cdot E_{\kappa,+}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \end{pmatrix},$$

$$(2.44) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times E_{\kappa,-}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \\ \nabla \cdot E_{\kappa,-}^{(\mathbf{a}, \lambda)} \end{pmatrix},$$

$$(2.45) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{L}'_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\nabla \times H_{\kappa,+}^{(\mathbf{b}, \mu)})) \\ \mathbf{n} \cdot H_{\kappa,+}^{(\mathbf{b}, \mu)} \end{pmatrix},$$

$$(2.46) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mu \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\nabla \times H_{\kappa,-}^{(\mathbf{b}, \mu)})) \\ \mathbf{n} \cdot H_{\kappa,-}^{(\mathbf{b}, \mu)} \end{pmatrix}$$

jeweils auf  $\partial\Omega$ . In diesem Sinn sind das äußere elektrische Randwertproblem, das auf Gleichung (2.43) führt, und das innere magnetische Randwertproblem, das auf Gleichung (2.46) führt, zueinander **adjungiert**, da sie auf die zueinander adjungierten Integraloperatoren  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa$  und  $\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa$  zurückgeführt werden können. Entsprechend sind das äußere magnetische und das innere elektrische Randwertproblem (mit den Randwertgleichungen (2.45) und (2.44)) zueinander adjungiert.

### 3 Die Matrix-Methode

#### 3.1 Ein Modellproblem

$\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa$  ist invertierbar für  $0 < |\kappa| < \epsilon$ ,  $\operatorname{Im} \kappa \geq 0$  und genügend kleines  $\epsilon > 0$ .<sup>1</sup> Dagegen gilt  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0) \neq \{0\}$ .<sup>2</sup> Damit liegt für  $\kappa \rightarrow 0$  ein typisches singuläres Störungsproblem vor.

MacCamy hat in [4] eine Methode zur Bestimmung der Asymptotik des inversen Operators  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{-1}$  für  $\kappa \rightarrow 0$  vorgeschlagen, die auf einer genauen Kenntnis der Nullräume  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  beruht.<sup>3</sup> Eine abstrakte Darstellung dieser Methode findet sich in [13]. Kress erhält in [3] durch eine Verallgemeinerung mit Hilfe der Riesz'schen Theorie Aussagen über das Prinzip der Grenzabsorption. Die Methode von MacCamy kann auf das ERP und das MRP angewendet werden, erfordert dann aber eine große Zahl schwieriger und unintuitiver Abschätzungen. Wir betrachten nun ein allgemeines, einfaches Modellproblem, um einen neuen Ansatz zu motivieren, mit dem sich die komplexen Verhältnisse, die bei  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa$  vorliegen,<sup>4</sup> übersichtlich nachvollziehen lassen. Um Verwechslungen mit den bereits eingeführten Integraloperatoren zu vermeiden, verwenden wir die Buchstaben  $\mathbf{T}_\kappa$  und  $\mathbf{T}'_\kappa$  anstelle von  $\mathbf{L}_\kappa$  und  $\mathbf{L}'_\kappa$ .

Wir betrachten das folgende **Modellproblem**: Sei  $X$  ein Banachraum mit der Norm  $\|\cdot\|$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein stetiges Innenprodukt<sup>5</sup> auf  $X$ .  $\{\mathbf{T}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  und  $\{\mathbf{T}'_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  seien stetige Scharen zueinander adjungierter, kompakter Endomorphismen, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\kappa, \mathbf{T}'_\kappa : X &\longrightarrow X && \text{für } \kappa \in \mathbb{C}, \\ \langle \mathbf{T}_\kappa x, y \rangle &= \langle x, \mathbf{T}'_\kappa y \rangle && \forall x, y \in X \end{aligned}$$

(die folgenden Untersuchungen gelten auch bei geeigneten Einschränkungen des Definitionsbereiches von  $\mathbf{T}_\kappa$ , etwa  $\operatorname{Im} \kappa \geq 0$  oder  $\kappa \in [0, \infty)$ ). Es existiere ein  $\epsilon_0 > 0$  so, daß  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$  invertierbar ist für  $0 < |\kappa| < \epsilon_0$ . Des weiteren sei  $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  eine stetig von  $\kappa$  abhängende Vektorenschar in  $X$ . Mit  $x_\kappa$  bezeichnen wir die nach Voraussetzung eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$(3.1) \quad c_\kappa = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x_\kappa$$

für  $0 < |\kappa| < \epsilon_0$ . Zu bestimmen ist das asymptotische Verhalten von  $x_\kappa$  für  $\kappa \rightarrow 0$ .

Zur Beschreibung der Asymptotik verwenden wir Landau-Symbole. Die Bezeichnung

$$x_\kappa = y_\kappa + O(|f(\kappa)|) \quad \text{bedeutet} \quad \|x_\kappa - y_\kappa\| = O(|f(\kappa)|) \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0$$

für Vektoren  $x_\kappa, y_\kappa \in X$ . Die Bezeichnung

$$\mathbf{A}_\kappa = \mathbf{B}_\kappa + O(|f(\kappa)|) \quad \text{bedeutet} \quad \|\mathbf{A}_\kappa - \mathbf{B}_\kappa\| = O(|f(\kappa)|) \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0$$

für beschränkte lineare Operatoren  $\mathbf{A}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa : X \longrightarrow X$ .

Die Banachraumeigenschaft von  $X$  spielt für unseren Ansatz wie für den von MacCamy eine wesentliche Rolle. Insbesondere benötigen wir das **Prinzip der stetigen Inversen** und das folgende

**Lemma 3.1.** *Seien  $X, Y$  Banachräume und  $\{\mathbf{F}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  eine stetige Schar beschränkter linearer Operatoren  $\mathbf{F}_\kappa : X \longrightarrow Y$ , die der Abschätzung*

$$\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{F}_0 + O(|f(\kappa)|)$$

*mit  $|f(\kappa)| \rightarrow 0$  für  $\kappa \rightarrow 0$  genügt. Ist nun  $\mathbf{F}_0 : X \longrightarrow Y$  bijektiv, dann existiert ein  $\epsilon > 0$  so, daß  $\mathbf{F}_\kappa$  invertierbar ist für  $|\kappa| < \epsilon$  und es gilt*

$$\mathbf{F}_\kappa^{-1} = \mathbf{F}_0^{-1} + O(|f(\kappa)|).$$

<sup>1</sup>[1], Satz 4.28 und die Bemerkung auf Seite 125

<sup>2</sup>siehe dazu [1], Kapitel 5.  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  wird in Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit explizit bestimmt.

<sup>3</sup>Nach der Fredholmtheorie ist dies äquivalent zur Kenntnis des Null- und Bildraumes von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_0$ .

<sup>4</sup>siehe Kapitel 4

<sup>5</sup>Alle Überlegungen dieses Kapitels lassen sich analog – und etwas leichter – für ein Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  durchführen.

*Beweis.*  $\mathbf{F}_0^{-1}$  existiert nach Voraussetzung und ist nach dem Prinzip der stetigen Inversen beschränkt. Es gilt

$$\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{F}_0 + (\mathbf{F}_\kappa - \mathbf{F}_0) = \mathbf{F}_0 [\mathbf{I} - \mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)].$$

Weiterhin existieren nach den Voraussetzungen ein  $\epsilon > 0$  und ein  $C > 0$  mit

$$\|\mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)\| < C |f(\kappa)| < \frac{1}{2} \quad \text{für } |\kappa| < \epsilon.$$

Wir weisen darauf hin, daß  $\mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)$  eine Abbildung von  $X$  in  $X$  ist. Nach der obigen Abschätzung konvergiert in  $\mathcal{L}(X, X)$ , dem Banachraum der beschränkten Endomorphismen von  $X$ , die *Neumannsche Reihe*

$$\mathbf{N}_\kappa := \sum_{j=0}^{\infty} [\mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)]^j = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)]^{-1}.$$

Folglich ist  $\mathbf{F}_\kappa$  für  $|f(\kappa)| < \epsilon$  invertierbar mit

$$\mathbf{F}_\kappa^{-1} = \mathbf{N}_\kappa \mathbf{F}_0^{-1}.$$

Schließlich können wir die Neumannsche Reihe abschätzen,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}_\kappa - \mathbf{I}\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{F}_0^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_\kappa)\|^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} (C |f(\kappa)|)^j = \frac{1}{1 - C |f(\kappa)|} - 1 \\ &= \frac{C}{1 - C |f(\kappa)|} |f(\kappa)| \leq 2C |f(\kappa)|, \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\|\mathbf{F}_\kappa^{-1} - \mathbf{F}_0^{-1}\| = \|(\mathbf{N}_\kappa - \mathbf{I})\mathbf{F}_0^{-1}\| \leq \|\mathbf{N}_\kappa - \mathbf{I}\| \|\mathbf{F}_0^{-1}\| \leq 2C \|\mathbf{F}_0^{-1}\| |f(\kappa)| = O(|f(\kappa)|).$$

□

Aus Lemma 3.1 ergibt sich mit  $f(\kappa) := \|\mathbf{F}_\kappa - \mathbf{F}_0\|$  unmittelbar die

**Folgerung 3.2.** *Sind  $X, Y$  Banachräume,  $\{\mathbf{F}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  eine stetige Schar von beschränkten linearen Operatoren von  $X$  in  $Y$ , und ist  $\mathbf{F}_0 : X \rightarrow Y$  bijektiv, dann existiert ein  $\epsilon > 0$  so, daß  $\mathbf{F}_\kappa$  für  $|\kappa| < \epsilon$  invertierbar und gleichmäßig beschränkt ist, d.h.  $\mathbf{F}_\kappa^{-1} = O(1)$ .*

In der bei unserem Modellproblem vorliegenden Situation ist  $\|(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1}\|$  genau dann unbeschränkt für  $\kappa \rightarrow 0$ , wenn  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_0$  nicht invertierbar ist. Genauer:

**Lemma 3.3.**

$$\mathbf{I} - \mathbf{T}_0 \text{ bijektiv} \iff (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1} = O(1) \text{ für } \kappa \rightarrow 0$$

*Beweis.* Ist  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_0$  bijektiv, so wende man Folgerung 3.2 auf  $\mathbf{F}_\kappa := \mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$  an. In umgekehrter Richtung folgt zunächst aus  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1} = O(1)$ , daß es ein  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  und ein  $C > 0$  so gibt, daß

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1}\| \leq C \quad \text{für } 0 < |\kappa| < \epsilon$$

gilt. Für  $x \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)$  ist  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)x = 0$  und damit wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{T}_\kappa$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x \rightarrow 0 \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0.$$

Dann gilt aber

$$\|x\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x\| \leq \underbrace{\|(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{-1}\|}_{\leq C} \underbrace{\|(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x\|}_{\rightarrow 0 \text{ } (\kappa \rightarrow 0)} \rightarrow 0$$

also  $x = 0$ , bzw.  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) = \{0\}$ . Nach der ersten Fredholmschen Alternative ist somit  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_0 : X \rightarrow X$  bijektiv.  $\square$

Wir setzen nun voraus, daß

$$m := \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0) \geq 1$$

ist. Nach der zweiten Fredholmschen Alternative gilt stets  $m < \infty$ . Wir setzen weiter voraus, daß bezüglich des Innenprodukts orthonormierte Basen

$$\begin{aligned} &\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \text{ von } \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0), \\ &\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \text{ von } \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0) \end{aligned}$$

existieren, d.h.

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m.$$

**Bemerkung.** Für ein Skalarprodukt lassen sich solche orthonormierten Basen stets mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens finden. Bei einem Innenprodukt existieren jedoch in der Regel Vektoren  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  mit  $\langle x, x \rangle = 0$ , so daß das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren nicht anwendbar ist. Ist  $X$  speziell ein Funktionenraum mit einem Innenprodukt der Form (2.27), so gilt für reellwertige Vektoren  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  die Beziehung  $\langle x, x \rangle > 0$ . Existieren also reellwertige Basen von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$ , so lassen sich analog zu Lemma 4.3 die geforderten orthonormierten Basen bestimmen.

MacCamy betrachtet den invertierbaren Operator  $\mathbf{I} - \mathbf{S} : X \rightarrow X$ , der durch

$$(3.2) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{S})x := (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)x + \sum_{j=1}^m \langle x, \psi_j \rangle \varphi_j$$

gegeben ist (vgl. [13], (6.13)), und führt mit Hilfe der stetigen Inversen  $(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}$  die Ausgangsgleichung (3.1) auf ein aus  $m$  Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem zurück. Aus der Invertierbarkeit von  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$  für genügend kleines  $|\kappa| \neq 0$  schließt MacCamy auf die eindeutige Lösbarkeit dieses Gleichungssystems. Das asymptotische Verhalten von  $x_\kappa$  läßt sich dann durch Abschätzen der expliziten Lösung von (3.1) bestimmen, wobei die Lösung des endlichdimensionalen LGS eine entscheidende Rolle spielt. Es zeigt sich bei der praktischen Behandlung von Wellenausbreitungsvorgängen<sup>6</sup> mit der Methode von MacCamy, daß die Asymptotik von  $x_\kappa$  für  $\kappa \rightarrow 0$  in erster Näherung auf das Verhalten der  $m \times m$ -Matrix

$$(3.3) \quad (\tilde{\mathbf{R}}_{ij, \kappa})_{i, j=1 \dots m} := (\langle \varphi_i, (\mathbf{T}_\kappa - \mathbf{T}_0)\psi_j \rangle)_{i, j=1 \dots m}$$

zurückgeht.<sup>7</sup> Wir wollen nun versuchen, einen Ansatz zu finden, der die gesuchte Asymptotik direkt aus dieser Matrix bestimmt.

<sup>6</sup>etwa zwischen lokal gestörten Parallellflächen (siehe [13]) oder in lokal gestörten Halbzylindern

<sup>7</sup>[13], (6.29) und (6.38)

### 3.2 Die Matrixgleichung

Im folgenden interpretieren wir  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa : X \rightarrow X$  als „ $2 \times 2$ -Matrixoperator,“ indem wir den Urbildraum  $X$  in der Form

$$(3.4) \quad X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp$$

und den Bildraum  $X$  in der Form

$$(3.5) \quad X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp$$

orthogonal zerlegen.<sup>8</sup> Alle dabei auftretenden Teilräume sind abgeschlossen. In der Tat:  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)$  ist endlichdimensional und damit automatisch vollständig. Sei  $(x_j)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp$ . Da  $X$  nach Voraussetzung ein Banachraum ist, existiert ein  $x \in X : \|x - x_j\| \rightarrow 0$ . Wegen  $x_j \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp$  gilt für  $i = 1, \dots, m$ :  $\langle \psi_i, x_j \rangle = 0$ . Da das Innenprodukt stetig ist, folgt aus  $x_j \rightarrow x$ , daß  $0 = \langle \psi_i, x_j \rangle \rightarrow \langle \psi_i, x \rangle$ . Also gilt  $x \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp$  und damit die behauptete Vollständigkeit. Die entsprechenden Aussagen für  $\mathbf{T}'_0$  folgen analog.

Wir definieren Projektionen gemäß der Zerlegung (3.4) im Urbildraum:

$$(3.6) \quad \mathbf{P}x := \sum_{j=1}^m \langle x, \psi_j \rangle \psi_j \quad \rightsquigarrow \quad x = \mathbf{P}x + (\mathbf{I} - \mathbf{P})x$$

und gemäß der Zerlegung (3.5) im Bildraum:

$$(3.7) \quad \mathbf{Q}x := \sum_{j=1}^m \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad \rightsquigarrow \quad x = \mathbf{Q}x + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})x.$$

$\mathbf{P}, \mathbf{I} - \mathbf{P}, \mathbf{Q}$  und  $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$  sind beschränkte Operatoren, da das Innenprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stetig ist. Aufgrund der Orthonormalität der gewählten Basen handelt es sich um Projektionen auf die Räume

$$(3.8) \quad \mathbf{P}X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0), \quad (\mathbf{I} - \mathbf{P})X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp,$$

$$(3.9) \quad \mathbf{Q}X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0), \quad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})X = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp.$$

Wir zerlegen nun die Ausgangsgleichung  $c_\kappa = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x_\kappa$  nach (3.4) und (3.5):

$$(3.10a) \quad c_\kappa^{(1)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q})c_\kappa, \quad c_\kappa^{(2)} := \mathbf{Q}c_\kappa,$$

$$(3.10b) \quad x_\kappa^{(1)} := (\mathbf{I} - \mathbf{P})x_\kappa, \quad x_\kappa^{(2)} := \mathbf{P}x_\kappa,$$

wobei der Integraloperator  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$  in 4 Blöcke zerfällt:

$$(3.10c) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)|_{(\mathbf{I} - \mathbf{P})X},$$

$$(3.10d) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)|_{\mathbf{P}X},$$

$$(3.10e) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} := \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)|_{(\mathbf{I} - \mathbf{P})X},$$

$$(3.10f) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} := \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)|_{\mathbf{P}X}.$$

<sup>8</sup>Die angegebenen Summen sind *direkt*, da die Existenz orthonormierter Basen in den Nullräumen gefordert wurde. Ansonsten könnte der Fall  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \cap \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp \neq \{0\}$  auftreten (etwa für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) = \text{sp}\{x\}$  mit  $\langle x, x \rangle = 0$ ).

Es gilt

$$\mathbf{x}_\kappa = \mathbf{x}_\kappa^{(1)} + \mathbf{x}_\kappa^{(2)}, \quad \mathbf{c}_\kappa = \mathbf{c}_\kappa^{(1)} + \mathbf{c}_\kappa^{(2)},$$

und (3.1) zerfällt durch Anwendung der Projektionen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$  in die Gleichungen

$$(3.11a) \quad \mathbf{c}_\kappa^{(1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)} \mathbf{x}_\kappa^{(1)} + (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} \mathbf{x}_\kappa^{(2)},$$

$$(3.11b) \quad \mathbf{c}_\kappa^{(2)} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} \mathbf{x}_\kappa^{(1)} + (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} \mathbf{x}_\kappa^{(2)}.$$

Wir fassen diese in Matrixnotation zusammen zu der **Matrixgleichung**

$$(3.12) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{c}_\kappa^{(1)} \\ \mathbf{c}_\kappa^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)} & (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} & (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\kappa^{(1)} \\ \mathbf{x}_\kappa^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Die in dieser Gleichung auftretende Operatormatrix bezeichnen wir als **Matrixdarstellung** von  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$ . Die Komponenten der Matrixdarstellung sind beschränkte lineare Operatoren zwischen Banachräumen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)} &: \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp, \\ (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} &: \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp, \\ (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} &: \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0). \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$$

endlichdimensional und kann bezüglich der Basen  $\{\psi_j\}$  und  $\{\varphi_j\}$  durch eine  $m \times m$ -Matrix dargestellt werden. Die Matrixdarstellung von  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$  ist vergleichbar mit der Zerlegung einer endlichen Matrix in Blöcke. Wir bezeichnen ihre Komponenten daher auch als **Blockoperatoren**.

**Bemerkung.** Die hier eingeführte Matrixdarstellung ist nicht mit der Definition (2.36) von  $\mathbf{L}_\kappa$  und  $\mathbf{L}'_\kappa$  in Matrixform zu verwechseln. Diese Operatoren sind a priori als Operatoren auf dem Produktraum  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) = \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega) \times C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  komponentenweise definiert. Alle Komponentenoperatoren sind Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen Funktionenräumen. Die Matrixgleichung entsteht im Gegensatz dazu a posteriori, nach Bestimmung der relevanten Nullräume. Komponenten mit dem Index <sup>(2)</sup> beziehen sich auf endlichdimensionale Räume. Wir werden in Kapitel 4 also mit zwei parallelen Zerlegungen von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa$  arbeiten. Die Zerlegung in „Komponentenoperatoren“ anhand der Definition wird mit tiefergestellten Indizes bezeichnet:

$$\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{L}_{11,\kappa} & \mathbf{L}_{12,\kappa} \\ \mathbf{L}_{21,\kappa} & \mathbf{I} + \mathbf{L}_{22,\kappa} \end{pmatrix},$$

die Zerlegung in die „Blockoperatoren“ der Matrixdarstellung mit eingeklammerten hochgestellten Indizes:  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}$ ,  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(12)}$  usw.

Die Matrixdarstellung ist so gewählt, daß  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_0$  die Matrixdarstellung

$$(3.13) \quad \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei

$$\mathbf{I} - \mathbf{T}_0 : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp$$

bijektiv ist. In der Tat: Zunächst ist  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)|_{\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)} = 0$ , also  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(12)} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(22)} = 0$ . Nach der zweiten Fredholmschen Alternative ist die Gleichung  $y = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)x$  genau dann lösbar, wenn  $y \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0')^\perp$  gilt. Folglich gilt  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(21)} = 0$  und  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)} : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0')^\perp$  ist surjektiv. Schließlich ist  $\mathbf{I} - \mathbf{T}_0$  wegen (3.4) auf  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^\perp$  injektiv und somit  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)}$  bijektiv.

Wegen  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(22)} = 0$  gilt

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} - (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(22)} = (\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)}.$$

Bezüglich der orthonormierten Basen  $\{\psi_j\}$  im Urbildraum und  $\{\varphi_j\}$  im Bildraum wird daher der Operator  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)}$  durch die Matrix

$$(\langle \varphi_i, (\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_\kappa)\psi_j \rangle)_{i,j=1\dots m}$$

dargestellt, die der Matrix  $(\tilde{\mathbf{R}}_{ij,\kappa})_{i,j=1\dots m}$  beim Ansatz von MacCamy entspricht (vgl. (3.3)). Der in (3.2) eingeführte Operator  $\mathbf{I} - \mathbf{S}$  hat bezüglich der genannten Basen in den Nullräumen die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

für die Inverse  $(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}$  läßt sich bei Vertauschung von Bild- und Urbildraum die folgende Matrixdarstellung angeben:

$$\begin{pmatrix} [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)}]^{-1} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Die Rolle, die die Inverse  $(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}$  bei MacCamy spielt, wird in unserem Ansatz direkt von dem Blockoperator  $[(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)}]^{-1}$  übernommen.

### 3.3 Motivation eines neuen Ansatzes

Zweck unserer Überlegungen ist, die Methode von MacCamy durch Verschärfung der Voraussetzungen zu vereinfachen. Dazu betrachten wir charakteristische Anwendungen der Methode von MacCamy auf lokal gestörte Wellenleiter ([13]) und Außenraumprobleme ([3]) und vergleichen sie mit der beim ERP und MRP vorliegenden Situation.

Zunächst gilt in allen betrachteten Fällen eine Abschätzung der Art

$$(3.14) \quad \|\mathbf{T}_\kappa - \mathbf{T}_0\| = O(|f(\kappa)|),$$

wobei  $f$  eine von dem jeweiligen Problem abhängende Funktion ist. Für lokal gestörte Streifen im  $\mathbb{R}^3$  ist  $f(\kappa) = (\ln \kappa)^{-1}$  (vgl. [13]),<sup>9</sup> bei lokal gestörten Halbzylindern gilt  $f(\kappa) = \kappa^{1/2}$ .<sup>10</sup> Kress setzt in [3] explizit  $f(\kappa) = \kappa^\mu$  ( $\mu \in \mathbb{N}$ ) voraus. Für die linke Seite der Ausgangsgleichung (3.1) gilt stets

$$(3.15) \quad \|c_\kappa - c_0\| = O(|f(\kappa)|)$$

<sup>9</sup>In [13] wird der Grenzübergang  $\kappa \rightarrow \pm \pi k$  für  $k \in \mathbb{N}$  betrachtet; die Übertragung unserer Überlegungen auf diesen Fall ist trivial.

<sup>10</sup>hier für  $\kappa \rightarrow \pm \sqrt{\lambda_p}$  mit  $f(\kappa \mp \sqrt{\lambda_p}) = (\kappa \mp \sqrt{\lambda_p})^{1/2}$ , wobei  $\lambda_p$  die Eigenwerte des Querschnittsoperators sind.

mit derselben Funktion  $f$ .<sup>11</sup> Die Matrix  $(\tilde{R}_{ij,\kappa})$  ist bei allen Problemen im folgenden Sinn asymptotisch regulär: Es gilt

$$(3.16) \quad \tilde{R}_{ij,\kappa} = f(\kappa)R_{ij} + O(|f(\kappa)|^2),$$

wobei  $(R_{ij})_{i,j=1\dots m}$  eine (konstante) invertierbare  $m \times m$ -Matrix ist.<sup>12</sup> Die Untersuchungen in [1], 160–163 deuten darauf hin, daß eine ähnliche Bedingung auch für das ERP und das MRP gilt (mit  $f(\kappa) = \kappa^2$ ). Es liegt also nahe, unser **Modellproblem** um die folgenden Annahmen zu ergänzen:

$$(3.17) \quad c_\kappa = c_0 + O(|f(\kappa)|),$$

$$(3.18) \quad \|\mathbf{T}_\kappa - \mathbf{T}_0\| = O(|f(\kappa)|),$$

$$(3.19) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} = f(\kappa)\mathbf{R} + O(|f(\kappa)|^2),$$

wobei der lineare Operator  $\mathbf{R} : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0')$  bijektiv ist. Insbesondere folgt aus (3.18) und (3.13), daß  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} = O(|f(\kappa)|)$  und  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} = O(|f(\kappa)|)$  gilt.

Bei den genannten Problemen tritt im Ergebnis jeweils eine Singularität der Ordnung  $f(\kappa)^{-1}$  zutage,<sup>13</sup> d.h. es gilt asymptotisch

$$x_\kappa = f(\kappa)^{-1}x_0 + O(1).$$

Für das ERP läßt die Formel (1.34) eine analoge Abschätzung erwarten. Sofern die Lösung unseres Modellproblems die Abschätzung

$$(*) \quad x_\kappa^{(2)} = O(|f(\kappa)|^{-1})$$

erfüllt, läßt sich die gesuchte Asymptotik direkt auf die Diagonalblöcke der Matrixzerlegung, speziell auf  $\mathbf{R}$ , zurückführen. In der Tat: wir setzen zunächst (\*) in die erste Zeile (3.11a) der Matrixgleichung ein:

$$\begin{aligned} c_\kappa^{(1)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}x_\kappa^{(1)} + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)}}_{=O(|f(\kappa)|)} \underbrace{x_\kappa^{(2)}}_{=O(|f(\kappa)|^{-1})} \\ \implies c_0^{(1)} + O(|f(\kappa)|) &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}x_\kappa^{(1)} + O(1) \\ \implies c_0^{(1)} + O(1) &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}x_\kappa^{(1)}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1 ist  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}$  für hinreichend kleines  $\kappa$  invertierbar und es gilt

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}]^{-1} = [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)}]^{-1} + O(|f(\kappa)|).$$

Damit folgt

$$x_\kappa^{(1)} = \underbrace{[(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)}]^{-1}}_{=O(1)} (c_0^{(1)} + O(1)) = O(1).$$

<sup>11</sup>Kress stellt etwas schwächere Forderungen an  $c_\kappa$ . Wir bleiben jedoch zu Gunsten einer einfacheren Darstellung bei der Annahme (3.15).

<sup>12</sup>siehe dazu [13], (6.47) und (6.38); bei Kress die explizite Voraussetzung [3], (2.23)

<sup>13</sup>Kress zeigt dabei, daß  $x_\kappa$  unter bestimmten Voraussetzungen an  $c_\kappa$  für  $\kappa \rightarrow 0$  konvergiert, woraus für allgemeines  $c_\kappa$  die Abschätzung  $x_\kappa = O(|f(\kappa)|^{-1})$  folgt.



Setzen wir dieses Ergebnis in die zweite Zeile (3.11b) der Matrixgleichung ein, so können wir für  $\kappa \rightarrow 0$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
c_\kappa^{(2)} &= \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)}}_{=O(|f(\kappa)|)} \underbrace{x_\kappa^{(1)}}_{=O(1)} + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)}}_{=f(\kappa)\mathbf{R} + O(|f(\kappa)|^2)} \underbrace{x_\kappa^{(2)}}_{=O(|f(\kappa)|^{-1})} \\
\Rightarrow c_0^{(2)} + O(|f(\kappa)|) &= O(|f(\kappa)|) + f(\kappa)\mathbf{R}x_\kappa^{(2)} + O(|f(\kappa)|) \\
\Rightarrow c_0^{(2)} + O(|f(\kappa)|) &= f(\kappa)\mathbf{R}x_\kappa^{(2)} \\
\Rightarrow x_\kappa^{(2)} &= f(\kappa)^{-1}\mathbf{R}^{-1}c_0^{(2)} + O(1).
\end{aligned}$$

Diese Überlegungen motivieren den folgenden Satz.

### 3.4 Formulierung der Matrix-Methode

**Satz 3.1.** Sei  $X$  ein Banachraum mit einem stetigen Innenprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\{\mathbf{T}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  und  $\{\mathbf{T}'_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  seien stetige Scharen zueinander adjungierter linearer Operatoren von  $X$  in  $X$  mit

$$\dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0) =: m \geq 1.$$

Es gebe bezüglich des Innenprodukts orthonormierte Basen  $\psi_1, \dots, \psi_m$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$ . Weiterhin sei  $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  eine stetige Vektorenschar in  $X$ .<sup>14</sup> Es gelte

$$(3.20) \quad \|\mathbf{T}_\kappa - \mathbf{T}_0\| = O(|f(\kappa)|)$$

$$(3.21) \quad \|c_\kappa - c_0\| = O(|f(\kappa)|)$$

für eine geeignete Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $|f(\kappa)| \rightarrow 0$  für  $\kappa \rightarrow 0$ . Wir betrachten die Gleichung  $c_\kappa = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)x_\kappa$  in der Matrixzerlegung nach Abschnitt 3.2:

$$(3.22) \quad \begin{pmatrix} c_\kappa^{(1)} \\ c_\kappa^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(11)} & (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(12)} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(21)} & (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\kappa^{(1)} \\ x_\kappa^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Es existiere eine stetige Schar  $\{\mathbf{R}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  linearer Operatoren  $\mathbf{R}_\kappa : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$  so, daß  $\mathbf{R}_0$  bijektiv ist und

$$(3.23) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa)^{(22)} = f(\kappa)\mathbf{R}_\kappa + O(|f(\kappa)|^2)$$

gilt. Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein  $\epsilon > 0$  so, daß die Matrixgleichung (3.22) für  $0 < |\kappa| < \epsilon$  eindeutig lösbar ist, und für die Lösung  $x_\kappa$  gilt asymptotisch

$$(3.24a) \quad x_\kappa^{(1)} = O(1),$$

$$(3.24b) \quad x_\kappa^{(2)} = f(\kappa)^{-1}\mathbf{R}_\kappa^{-1}c_0^{(2)} + O(1)$$

bzw. wegen  $x_\kappa = x_\kappa^{(1)} + x_\kappa^{(2)}$

$$(3.25) \quad x_\kappa = f(\kappa)^{-1}\mathbf{R}_\kappa^{-1}c_0^{(2)} + O(1).$$

<sup>14</sup> $\kappa \in \mathbb{C}$  kann dabei durch weitere Bedingungen wie  $\text{Im } \kappa \geq 0$  oder  $\kappa \in [0, \infty)$  eingeschränkt werden; allgemein genügt  $\kappa \in M \subseteq \mathbb{C}$  mit  $0 \in M$  und  $0$  kein isolierter Punkt von  $M$ .

*Beweis.* Wir schreiben abkürzend  $\mathbf{A}_\kappa := \mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$ . Wir bestimmen zunächst mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine explizite Lösung  $x_\kappa = x_\kappa^{(1)} + x_\kappa^{(2)}$  des folgenden Gleichungssystems:

$$(1) \quad c_\kappa^{(1)} = \mathbf{A}_\kappa^{(11)} x_\kappa^{(1)} + \mathbf{A}_\kappa^{(12)} x_\kappa^{(2)}$$

$$(2) \quad c_\kappa^{(2)} = \mathbf{A}_\kappa^{(21)} x_\kappa^{(1)} + \mathbf{A}_\kappa^{(22)} x_\kappa^{(2)}$$

Nach den Voraussetzungen gilt  $\mathbf{A}_\kappa^{(11)} = \mathbf{A}_0^{(11)} + O(|f(\kappa)|)$  und  $\mathbf{A}_0^{(11)} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)^{(11)}$  ist bijektiv (vgl. die Argumentation zu (3.13)). Nach Lemma 3.1 existiert folglich ein  $\epsilon_1 > 0$  so, daß  $\mathbf{A}_\kappa^{(11)}$  für  $|\kappa| < \epsilon_1$  bijektiv ist. Für den Umkehroperator gilt die Abschätzung

$$[\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} = [\mathbf{A}_0^{(11)}]^{-1} + O(|f(\kappa)|).$$

Entsprechend dem Vorgehen beim Gaußschen Eliminationsverfahren für endliche Matrizen wenden wir auf Gleichung (1) den für  $|\kappa| < \epsilon_1$  definierten Operator

$$\mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$$

an und erhalten so:

$$(*) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} c_\kappa^{(1)} &= \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa^{(11)} x_\kappa^{(1)} + \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa^{(12)} x_\kappa^{(2)} \\ &= \mathbf{A}_\kappa^{(21)} x_\kappa^{(1)} + \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa^{(12)} x_\kappa^{(2)}. \end{aligned}$$

Wir subtrahieren (\*) von Gleichung (2):

$$c_\kappa^{(2)} - \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} c_\kappa^{(1)} = \left( \mathbf{A}_\kappa^{(22)} - \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa^{(12)} \right) x_\kappa^{(2)},$$

beziehungsweise abkürzend

$$(2') \quad \tilde{c}_\kappa^{(2)} = \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)} x_\kappa^{(2)}$$

mit

$$(3) \quad \tilde{c}_\kappa^{(2)} := c_\kappa^{(2)} - \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} c_\kappa^{(1)},$$

$$(4) \quad \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)} := \mathbf{A}_\kappa^{(22)} - \mathbf{A}_\kappa^{(21)} [\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa^{(12)}.$$

Offensichtlich sind die Gleichungssysteme (1), (2') und (1), (2) zueinander äquivalent, d.h.  $x_\kappa = x_\kappa^{(1)} + x_\kappa^{(2)}$  ist genau dann Lösung von (1), (2') wenn es Lösung von (1), (2) ist.<sup>15</sup> Nach Voraussetzung (3.23) gilt

$$\mathbf{A}_\kappa^{(22)} = f(\kappa) \mathbf{R}_\kappa + O(|f(\kappa)|^2),$$

und  $\mathbf{R}_0 : \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}'_0)$  ist bijektiv. Als linearer Operator zwischen endlichdimensionalen Räumen ist  $\mathbf{R}_0$  mitsamt seiner Inversen automatisch beschränkt. Folgerung 3.2 besagt nun, daß es ein  $\epsilon_2 \in (0, \epsilon_1)$  gibt, so daß  $\mathbf{R}_\kappa^{-1}$  für  $|\kappa| < \epsilon_2$  existiert. Darüberhinaus ist  $\|\mathbf{R}_\kappa^{-1}\|$  beschränkt für  $\kappa \rightarrow 0$ . Nach den Voraussetzungen gilt wegen  $\mathbf{A}_0^{(21)} = 0$  und  $\mathbf{A}_0^{(12)} = 0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)} &= f(\kappa) \mathbf{R}_\kappa + O(|f(\kappa)|^2) - \underbrace{\mathbf{A}_\kappa^{(21)}}_{=O(|f(\kappa)|)} \underbrace{[\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1}}_{=O(1)} \underbrace{\mathbf{A}_\kappa^{(12)}}_{=O(|f(\kappa)|)} \\ &= f(\kappa) \mathbf{R}_\kappa + O(|f(\kappa)|^2). \end{aligned}$$

<sup>15</sup>  $x_\kappa$  Lösung von (1), (2)  $\implies x_\kappa$  Lösung von (\*)  $\implies x_\kappa$  erfüllt (2') und umgekehrt

Für  $0 < |\kappa| < \epsilon_2$  folgt hieraus

$$f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)} = \mathbf{I} + \mathcal{O}(|f(\kappa)|).$$

$\mathbf{I}$  steht in der letzten Gleichung für die Identität in  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}_0)$ . Nach Lemma 3.1 existiert ein  $\epsilon_3 \in (0, \epsilon_2)$  so, daß  $f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  invertierbar ist, und es gilt asymptotisch

$$[f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}]^{-1} = \mathbf{I} + \mathcal{O}(|f(\kappa)|).$$

Mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)} = (f(\kappa) \mathbf{R}_\kappa) (f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)})$$

und  $\|\mathbf{R}_\kappa^{-1}\| = \mathcal{O}(1)$  folgt hieraus, daß  $[\tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}]^{-1}$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  existiert und der Abschätzung

$$(5) \quad [\tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}]^{-1} = f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} + \mathcal{O}(1)$$

genügt. Daher besitzt (2') für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  die eindeutige Lösung

$$x_\kappa^{(2)} = [\tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}]^{-1} \tilde{c}_\kappa^{(2)}.$$

Wir können diese Lösung asymptotisch abschätzen. Zunächst gilt nach (3)

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\kappa^{(2)} &= \underbrace{c_\kappa^{(2)}}_{=c_0^{(2)} + \mathcal{O}(|f(\kappa)|)} - \underbrace{\mathbf{A}_\kappa^{(21)}}_{=\mathcal{O}(|f(\kappa)|)} \underbrace{[\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1}}_{=\mathcal{O}(1)} \underbrace{c_\kappa^{(1)}}_{=\mathcal{O}(1)} \\ &= c_0^{(2)} + \mathcal{O}(|f(\kappa)|). \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (5)

$$\begin{aligned} x_\kappa^{(2)} &= \underbrace{[\tilde{\mathbf{A}}_\kappa^{(22)}]^{-1}}_{=f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} + \mathcal{O}(1)} \underbrace{\tilde{c}_\kappa^{(2)}}_{=c_0^{(2)} + \mathcal{O}(|f(\kappa)|)} \\ &= f(\kappa)^{-1} \mathbf{R}_\kappa^{-1} c_0^{(2)} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Gleichung (1) läßt sich für  $|\kappa| < \epsilon_1$  eindeutig nach  $x_\kappa^{(1)}$  auflösen:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_\kappa^{(1)} &= \underbrace{[\mathbf{A}_\kappa^{(11)}]^{-1}}_{=\mathcal{O}(1)} \left( \underbrace{c_\kappa^{(1)}}_{=\mathcal{O}(1)} - \underbrace{\mathbf{A}_\kappa^{(12)}}_{=\mathcal{O}(|f(\kappa)|)} \underbrace{x_\kappa^{(2)}}_{=\mathcal{O}(|f(\kappa)|^{-1})} \right) \\ &= \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Damit sind die Behauptungen des Satzes für  $\epsilon := \epsilon_3$  bewiesen.  $\square$

**Bemerkung.** Satz 3.1 wurde etwas allgemeiner formuliert als die Vorüberlegungen in Abschnitt 3.3: der invertierbare Operator  $\mathbf{R}$  darf nun als Schar  $\{\mathbf{R}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  von  $\kappa$  abhängen. Diese Verallgemeinerung ist motiviert durch das ERP, wobei  $f(\kappa) = \kappa^2$  ist. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, tritt dabei tatsächlich ein weiteres nichttriviales Glied auf, und es gilt für  $\kappa \rightarrow 0$  eine Abschätzung der Art

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(22)} = \kappa^2 \mathbf{R}_0 + \kappa^3 \mathbf{R}_{(1)} + \mathcal{O}(|\kappa|^4) \quad (\text{vereinfacht}).$$

Dabei ist  $\mathbf{R}_0 : \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  bijektiv,  $\mathbf{R}_{(1)}$  jedoch nicht.

### 3.5 Eine Anwendung

In der in [3] beschriebenen Situation gibt Kress Voraussetzungen an, unter denen Konvergenz für  $\kappa \rightarrow 0$  vorliegt. Sind diese Voraussetzungen nicht gegeben, so kann unter leicht verschärften Bedingungen mit Hilfe der Matrix-Methode die auftretende Resonanz explizit angegeben werden. Wir formulieren dies in Anlehnung an die Bezeichnungen in [3] als

**Korollar 3.2.** Sei  $X$  ein Banachraum mit einem stetigen Innenprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seien  $\{\mathbf{K}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  und  $\{\mathbf{L}_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  zueinander adjungierte Familien kompakter Endomorphismen von  $X$ . Es sei weiterhin  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0) \neq \{0\}$ , und es gebe orthonormale Basen  $\{\varphi_i\}$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0)$  und  $\{\psi_i\}$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_0)$ . Sei  $\{f_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{C}}$  eine Familie von Vektoren in  $X$ . Es gelte für ein  $\mu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_\kappa - f_0\| &= O(|\kappa|^\mu) && (\text{vgl. [3], (2.21)}), \\ \|\mathbf{K}_\kappa - \mathbf{K}_0\| &= O(|\kappa|^\mu) && (\text{vgl. [3], (2.21)}), \\ \langle (\mathbf{K}_\kappa - \mathbf{K}_0)\varphi_i, \psi_j \rangle &= R_{ij}\kappa^\mu + O(|\kappa|^{2\mu}) && (\text{vgl. [3], (2.23)}) \end{aligned}$$

mit einer invertierbaren Matrix  $(R_{ij})$ . Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  so, daß die Gleichung

$$f_\kappa = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_\kappa)x_\kappa$$

eindeutig lösbar ist für  $0 < |\kappa| < \epsilon$  und es gilt asymptotisch

$$x_\kappa = \kappa^{-\mu} \sum_{i,j} \varphi_i R^{ij} \langle f_0, \psi_j \rangle + O(1).$$

Dabei bezeichnet  $(R^{ij}) = (R_{ij})^{-1}$  die zu  $(R_{ij})$  inverse Matrix, d.h. es gilt

$$\sum_j R^{ij} R_{jk} = \sum_j R_{ij} R^{jk} = \delta_{ik}.$$

Ist speziell  $\langle f_0, \psi_j \rangle = 0$ , d.h.  $\langle f_\kappa, \psi_j \rangle = O(|\kappa|^\mu)$  für alle  $j$ , so bleibt  $x_\kappa$  beschränkt:  $x_\kappa = O(1)$ .

*Beweis.* folgt sofort aus dem Matrixsatz 3.1. □

**Bemerkung.** Im Fall  $\langle f_0, \psi_j \rangle = 0$  für alle  $j$  folgt mit  $x_\kappa^{(2)} = O(1)$  aus Gleichung (6) im Beweis von Satz 3.1

$$x_\kappa^{(1)} = [\mathbf{A}_0^{(11)}]^{-1} c_0^{(1)} + O(|\kappa|^\mu)$$

und somit die Konvergenz von  $x_\kappa^{(1)}$  für  $\kappa \rightarrow 0$ . Um auch die Konvergenz von  $x_\kappa^{(2)}$  sicher zu stellen, müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt sein, die den Voraussetzungen [3], (2.22) und (2.24) in der Arbeit von Kress entsprechen.

## 4 Das elektrische Randwertproblem

### 4.1 Die Nullräume von $\mathbf{I} + \mathbf{L}_0$ und $\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0$

Zur Anwendung der Matrix-Methode müssen zunächst die Nullräume  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  bestimmt werden. Wir bezeichnen die Elemente dieser Nullräume kurz als **Eigenfunktionen** und unterdrücken, daß der zugehörige Eigenwert 0 ist. Nach (2.36) und (2.37) ist

$$(4.1) \quad \mathbf{I} + \mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{M}_0 & \mathbf{L}_{12,0} \\ 0 & \mathbf{I} + \mathbf{K}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} + \mathbf{L}'_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{M}'_0 & 0 \\ \mathbf{L}'_{21,0} & \mathbf{I} + \mathbf{K}'_0 \end{pmatrix}.$$

Ist  $\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix}$  eine Eigenfunktion von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_0$ , so muß  $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)\lambda = 0$  gelten, also  $\lambda \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$ . Für  $\lambda = 0$  muß darüberhinaus  $a \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$  gelten. Man erhält also die Eigenfunktionen von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_0$  aus Eigenfunktionen von  $\mathbf{I} + \mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{I} + \mathbf{M}_0$ . Wir wenden uns daher zunächst den Nullräumen dieser Operatoren zu. Es bietet sich an, einige Begriffe aus der Potentialtheorie einzuführen: Ein **harmonisches Vektorfeld**  $\mathbf{E}$  in  $D$  bzw.  $\Omega$  ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das stetig auf den Rand  $\partial\Omega$  fortsetzbar ist und die Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

erfüllt. Bei einem in  $\Omega$  definierten Feld wird darüberhinaus

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

vorausgesetzt. Erfüllt  $\mathbf{E}$  zusätzlich die Randbedingung

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so spricht man von einem **Dirichletfeld**, bei der Randbedingung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

von einem **Neumannfeld**. Dirichletfelder entsprechen physikalisch elektrostatischen Feldern, Neumannfelder magnetostatischen Feldern.

**Lemma 4.1.**

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0) &= \{v|_{\partial\Omega} \mid v \in C^1(D) \cap C(\bar{D}), \nabla v = 0\}, \\ \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0) &= \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y})|_{\partial\Omega} \mid \mathbf{Y} \text{ ist ein Dirichletfeld in } \Omega\}, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0) &= \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0) = n \quad (\text{Anzahl der Komponenten } D_i \text{ von } D). \end{aligned}$$

Es existieren reelle Basen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  und  $\mu_1, \dots, \mu_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$ .  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  besteht aus Feldern  $v$ , die auf jeder Komponente  $\partial D_i$  von  $\partial\Omega$  konstant sind.

*Beweis.* [1], Satz 5.1 für die Dimensionen. [1], Satz 5.2 für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$ . [1], Diskussion im Anschluß an Satz 5.7 für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$ . Die Existenz einer reellen Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  folgt aus der Implikation

$$v \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0) \implies \operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$$

und entsprechend für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$ . □

**Lemma 4.2.**

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0) &= \{(n \times E)|_{\partial\Omega} \mid E \text{ ist ein Neumannfeld in } D\}, \\ \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0) &= \{Z|_{\partial\Omega} \mid Z \text{ ist ein Neumannfeld in } \Omega\}, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0) &= \dim \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0) = p \quad (\text{topologisches Geschlecht von } D).\end{aligned}$$

Es existieren reelle Basen  $a_1, \dots, a_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$  und  $b_1, \dots, b_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)$ .

*Beweis.* [1], Satz 5.4 für die Dimensionen. [1], Satz 5.5 für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$ . [1], Diskussion auf Seite 163 für  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)$ . Die Existenz reeller Basen folgt wie bei Lemma 4.1.  $\square$

Wir können aus diesen Basen nun eine Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und eine Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  gewinnen. Für zusätzliche Eigenschaften, die wir von letzteren Basen fordern wollen, benötigen wir das folgende

**Lemma 4.3.** *Zu einem System linear unabhängiger reeller  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  (vgl. (2.33)) gibt es ein weiteres System linear unabhängiger reeller  $\varphi^1, \dots, \varphi^m$  mit*

$$\begin{aligned}\text{sp} \{\varphi^1, \dots, \varphi^m\} &= \text{sp} \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}, \\ \langle \varphi^i, \varphi_j \rangle &= \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen  $\varphi^1, \dots, \varphi^m$  als das **duale System** zu  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ .

*Beweis.* Der reelle Unterraum

$$M := \{\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  enthält nur Vektoren mit reellwertigen Komponenten. Daher gilt für jedes  $\varphi = \begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} \in M$  mit  $\varphi \neq 0$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} (|a|^2 + \lambda^2) dF > 0.$$

Damit ist die reelle, symmetrische  $m \times m$ -Matrix

$$(g_{ij})_{i,j=1\dots m} := (\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j=1\dots m}$$

positiv definit und folglich invertierbar;  $(g_{ij})$  kann als metrischer Tensor aufgefaßt werden. Wir bezeichnen die Inverse mit

$$(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$$

und setzen

$$\varphi^i := \sum_{k=1}^m g^{ik} \varphi_k$$

für  $i = 1, \dots, m$ . Aufgrund der Invertierbarkeit von  $(g^{ij})$  sind die  $\varphi^i$  linear unabhängig und spannen denselben Unterraum auf wie  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ . Sie erfüllen die Dualitätsrelation wegen

$$\langle \varphi^i, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m g^{ik} \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=1}^m g^{ik} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^m g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}.$$

$\square$

**Lemma 4.4.** Zu reellen Basen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$  existieren reelle Tangentialfelder  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n \in \mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  so, daß

$$(4.2) \quad \tilde{\psi}_i := \begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, p),$$

$$(4.3) \quad \psi_j := \begin{pmatrix} \alpha'_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n)$$

eine Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  bilden. Die Funktionen  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  können so gewählt werden, daß

$$(4.4) \quad \langle \tilde{\psi}_i, \psi_j \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots p, j = 1 \dots n.$$

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$ . Damit auch  $\psi_j \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  gilt, muß nach (2.36) und (2.37)  $\alpha'_j$  die Gleichung

$$(*) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)\alpha'_j = -\mathbf{L}_{12,0}\lambda_j = \mathbf{n} \times \mathbf{S}_0[\lambda_j \mathbf{n}]$$

erfüllen. Diese Gleichung ist nach der zweiten Fredholmschen Alternative genau dann lösbar, wenn

$$\mathbf{L}_{12,0}\lambda_j \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)^\perp$$

bzw. wenn in  $\mathcal{T}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  für eine beliebig gewählte Basis  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)$

$$(4.5) \quad \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{L}_{12,0}\lambda_j \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, p)$$

gilt. Zum Nachweis führen wir zunächst nach [1], (5.28) die Vektorfelder

$$A_i(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{n}_y \times \mathbf{b}_i(\mathbf{y})) dF_y$$

ein. Nach [1], (5.34) gilt

$$\nabla \cdot A_i = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Nach Lemma 4.1 ist  $\lambda_j$  auf jeder Komponente  $\partial D_k$  von  $\partial\Omega$  konstant; wir bezeichnen diesen konstanten Wert mit  $\lambda_{j,\partial D_k}$ . Nach Definition (2.30) gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{L}_{12,0}\lambda_j \rangle &= \langle \mathbf{b}_i, -\mathbf{n} \times \mathbf{S}_0[\lambda_j \mathbf{n}] \rangle \\ &= -2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \cdot \left( \mathbf{n}_x \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda_j(\mathbf{y}) \mathbf{n}_y dF_y \right) dF_x \\ &= -2 \sum_{k=1}^n \lambda_{j,\partial D_k} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial D_k} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n}_x \times (\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}_y)) dF_y dF_x \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_{j,\partial D_k} \int_{\partial D_k} \int_{\partial\Omega} (\phi_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{n}_y) \cdot (\mathbf{n}_x \times \mathbf{b}_i(\mathbf{x})) dF_x dF_y \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_{j,\partial D_k} \int_{\partial D_k} \mathbf{n}_y \cdot A_i(\mathbf{y}) dF_y \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} 2 \sum_{k=1}^n \lambda_{j,\partial D_k} \int_{D_k} \underbrace{\nabla \cdot A_i(\mathbf{y})}_{=0} d\mathbf{y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist zulässig, da der Integrand absolut integrabel ist. In demselben Schritt wurde auch  $\phi_0(x, y) = \phi_0(y, x)$  verwendet. Damit ist (4.5) gezeigt. Es existiert also eine Lösung  $a'_j$  von (\*), die jedoch für  $p > 0$  nicht eindeutig bestimmt ist. Wir wollen nun  $a'_j$  so wählen, daß die Orthogonalitätsbedingung (4.4) erfüllt wird. Dazu bestimmen wir nach Lemma 4.3 die zu  $a_1, \dots, a_p$  duale Basis  $a^1, \dots, a^p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$  und setzen für eine beliebige Lösung  $a'$  von (\*)

$$a'_j := a' - \sum_{k=1}^p \langle a', a_k \rangle a^k.$$

Dann gilt

$$\psi_j = \begin{pmatrix} a'_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0),$$

und für  $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_i, \psi_j \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle a_i, a'_j \rangle \\ &= \langle a_i, a' \rangle - \sum_{k=1}^p \langle a', a_k \rangle \langle a_i, a^k \rangle \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.3}}{=} \langle a_i, a' \rangle - \sum_{k=1}^p \langle a', a_k \rangle \delta_{ik} \\ &= \langle a_i, a' \rangle - \langle a', a_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Für jedes  $\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  gilt nach (4.1)  $\lambda \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  und

$$(**) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{M}_0) a + \mathbf{L}_{12,0} \lambda = 0.$$

Wegen  $\lambda \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  mit

$$\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n.$$

Wegen (\*) und (\*\*) erfüllt

$$a' := a - \alpha_1 a'_1 - \dots - \alpha_n a'_n$$

die Gleichung  $(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0) a' = 0$ . Daher gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten  $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{C}$  mit

$$a' = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_p a_p,$$

und es gilt  $a = \sum_{i=1}^p \beta_i a_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j a'_j$ . Hieraus und aus  $\lambda = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j$  folgt wegen (4.2) und (4.3)

$$\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p \beta_i \tilde{\psi}_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten. Also ist  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p, \psi_1, \dots, \psi_n$  eine Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$ .  $\square$

**Lemma 4.5.** Zu reellen Basen  $\mu_1, \dots, \mu_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$  und  $b_1, \dots, b_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)$  existieren reelle Korrekturfelder  $\mu'_1, \dots, \mu'_p \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  so, daß

$$(4.6) \quad \tilde{\varphi}_i := \begin{pmatrix} b_i \\ \mu'_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, p),$$

$$(4.7) \quad \varphi_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n)$$



eine Basis von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  bilden. Die Funktionen  $\mu'_1, \dots, \mu'_p$  können so gewählt werden, daß

$$(4.8) \quad \langle \tilde{\varphi}_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots p, j = 1 \dots n.$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 4.4. Die Korrekturfelder  $\mu'_i$  müssen dabei jeweils die Gleichung

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)\mu'_i = -\mathbf{L}'_{21,0}b_i$$

erfüllen. Diese ist wiederum nach der Fredholmtheorie lösbar, da für jeden Basisvektor  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$

$$\langle \lambda_j, \mathbf{L}'_{21,0}b_i \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \mathbf{L}'_0 \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{L}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \mathbf{L}_{12,0}\lambda_j, b_i \rangle \stackrel{(4.5)}{=} 0$$

gilt. Die Orthogonalitätsbedingung kann wie bei Lemma 4.4 mit Hilfe der zu  $\mu_1, \dots, \mu_n$  dualen Basis  $\mu^1, \dots, \mu^n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$  erfüllt werden.  $\square$

Die Operatoren  $\mathbf{M}_0$  und  $\mathbf{M}'_0$  werden oft mit magnetischen Feldern in Verbindung gebracht, die Operatoren  $\mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{K}'_0$  dagegen mit elektrischen Feldern. Aus diesem Grund bezeichnen wir

$$\psi_1, \dots, \psi_n; \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

als **elektrische Eigenfunktionen** (da sie aus den Eigenfunktionen der „elektrischen“ Integraloperatoren hervorgehen) und

$$\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p; \quad \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p$$

als **magnetische Eigenfunktionen**.<sup>1</sup> Dies soll nicht davon ablenken, daß *alle* diese Eigenfunktionen zur Integralgleichung des *elektrischen* Randwertproblems gehören.

## 4.2 Physikalische Interpretation

Wir haben in Kapitel 3 zugunsten einer einfacheren und intuitiveren Darstellung *orthonormale* Basen in den Nullräumen vorausgesetzt. Bei Anwendungen der Methode von MacCamy wird dagegen oft eine orthonormale Basis im Nullraum des adjungierten Operators gewählt und daraus eine Basis des anderen Nullraumes abgeleitet (vgl. [13], 808 und [1], Sätze 5.7 und 5.8). Es stellt sich heraus, daß es beim ERP günstiger ist, die Basen der Nullräume anhand einer physikalischen Interpretation der von den Eigenfunktionen erzeugten Potentialfelder zu wählen. Diese Wahl wird entscheidende Vorteile bei der Berechnung der für Resonanzen verantwortlichen Blockoperatoren in der Matrixgleichung des ERP bieten.

Wir wollen zunächst die von  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p$  und  $\psi_1, \dots, \psi_n$  erzeugten Potentialfelder für  $\kappa = 0$  interpretieren. Dazu müssen wir die folgenden Felder untersuchen (vgl. (2.38)):

$$(4.9) \quad \mathbb{E}_0^{\tilde{\psi}_i}(\mathbf{x}) := \mathbb{E}_0^{(a_i, 0)} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) a_i(\mathbf{y}) dF_{\mathbf{y}},$$

$$(4.10) \quad \mathbb{E}_0^{\psi_j}(\mathbf{x}) := \mathbb{E}_0^{(a'_j, \lambda_j)} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) a'_j(\mathbf{y}) dF_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda_j(\mathbf{y}) n_{\mathbf{y}} dF_{\mathbf{y}}.$$

<sup>1</sup>Zur besseren Unterscheidung werden wir bisweilen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  als **adjungierte elektrische Eigenfunktionen** und  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p$  als **adjungierte magnetische Eigenfunktionen** bezeichnen, da sie Eigenfunktionen des adjungierten Operators  $\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0$  sind.

Nach Satz 2.3 liegen diese Felder im Nullraum  $\mathcal{N}(A)$  des in (1.19) eingeführten Operators  $A$ , und nach (1.25) bilden sie Dirichletfelder in  $\Omega$  im zu Beginn von 4.1 angegebenen Sinn. Wir stellen im folgenden bekannte Eigenschaften solcher Felder zusammen. Beweise<sup>2</sup> finden sich in [5], jedoch wurden die Bezeichnungen an die hier verwendeten Konventionen angepaßt.<sup>3</sup>

Sei  $E \in \mathcal{N}(A)$  ein reelles **Dirichletfeld**. Wir wählen Kurven  $C_k$  in  $\Omega$ , die einen beliebigen Punkt auf  $\partial D_k$  mit dem Punkt  $\infty$  verbinden. Die **Ergiebigkeiten** von  $E$  sind die reellen Zahlen

$$(4.11) \quad \xi^k(E) := \int_{\partial D_k} \mathbf{n} \cdot E \, dF \quad (k = 1, \dots, n);$$

physikalisch läßt sich  $E$  als ein **elektrostatisches Feld** und  $\xi^k(E)$  (ggf. bis auf eine Normierungskonstante) als die auf den Leiter  $D_k$  aufgebrachte Gesamtladung interpretieren. Die **Spannungen** von  $E$  sind die Zahlen

$$(4.12) \quad \xi_k(E) := \int_{C_k} \mathbf{t} \cdot E \, ds \quad (k = 1, \dots, n).$$

Wegen  $\nabla \times E = 0$  in  $\Omega$  und  $\mathbf{n} \times E = 0$  auf  $\partial\Omega$  ist  $E$  ein Gradientenfeld in  $\Omega$ , d.h. es existiert ein **elektrostatisches Potential**  $u$  mit  $u(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  und

$$E = -\nabla u.$$

Das Potential  $u$  ist auf jeder Komponente  $\partial D_k$  von  $\partial\Omega$  konstant und entspricht der zugehörigen Spannung von  $E$ :

$$(4.13) \quad u|_{\partial D_k} \equiv \xi_k(E).$$

Es gibt eine reelle Basis  $Y_1, \dots, Y_n$  von  $\mathcal{N}(A)$  mit der Eigenschaft

$$(4.14) \quad \xi^k(Y_j) = \delta_{kj}.$$

Wir bezeichnen sie als **kovariante Basis** von  $\mathcal{N}(A)$ . Die symmetrische reelle Matrix  $(C_{ij})$  mit

$$C_{ij} := \int_{\Omega} Y_i \cdot Y_j \, dx$$

ist positiv definit. Wir bezeichnen ihre Inverse mit  $(C^{ij}) := (C_{ij})^{-1}$ . Wir nennen  $(C^{ij})$  den **Kapazitätstensor**<sup>4</sup> von  $\Omega$ . Die Dirichletfelder

$$(4.15) \quad Y^i := \sum_{j=1}^n C^{ij} Y_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

bilden wieder eine reelle Basis von  $\mathcal{N}(A)$ , die wir als **kontravariante Basis** bezeichnen. Sie hat die Eigenschaft

$$(4.16) \quad \xi_k(Y^i) = \delta_{ki}.$$

<sup>2</sup>Martensen zeigt in [5] unter der Voraussetzung analytischer Ränder die analytische Fortsetzbarkeit der Dirichletfelder auf den Rand. Die hier verwendeten Tatsachen bleiben jedoch auch im allgemeinen Fall gültig. Da wir Dirichletfelder in  $\Omega$  betrachten, ist in den Ausführungen von Martensen der äußere Rand  $\mathcal{S}^0$  als der Punkt  $\infty$  zu interpretieren (siehe [5], 217). Es sei darauf hingewiesen, daß Martensen ausnahmslos *reelle* Vektorfelder betrachtet.

<sup>3</sup>Insbesondere werden die im folgenden eingeführten Dirichletfelder (bzw. elektrostatischen Felder)  $Y^j, Y_j$  in [5] mit  $\mathbf{y}^j, \mathbf{y}_j$  bezeichnet; die Ergiebigkeiten  $\xi^k$  und Spannungen  $\xi_k$  mit  $Y^k, Y_k$ .

<sup>4</sup>[5], 214

Jedes Feld  $E \in \mathcal{N}(A)$  besitzt die eindeutigen Zerlegungen

$$(4.17) \quad E = \sum_{k=1}^n \xi^k(E) Y_k = \sum_{k=1}^n \xi_k(E) Y^k.$$

Insbesondere ist  $E$  durch seine Ergiebigkeiten bzw. seine Spannungen eindeutig festgelegt. Eine einfache Rechnung liefert die wichtige Dualitätseigenschaft

$$(4.18) \quad (Y^i, Y_j) = \int_{\Omega} Y^i \cdot Y_j \, dx = \delta_{ij}.$$

Die Bezeichnung von  $(C^{ij})$  als Kapazitätstensor erklärt sich durch die Beziehungen

$$(4.19) \quad \xi^k(E) = \sum_{l=1}^n C^{kl} \xi_l(E), \quad \xi_k(E) = \sum_{l=1}^n C_{kl} \xi^l(E).$$

Wir führen schließlich die zu der kovarianten und kontravarianten Basis gehörenden elektrostatischen Potentiale  $u^i, u_j$  ein, die

$$(4.20) \quad Y^i = -\nabla u^i, \quad Y_j = -\nabla u_j$$

sowie  $u^i \rightarrow 0, u_j \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  erfüllen. Die Komponenten des Kapazitätstensors und des reziproken Kapazitätstensors lassen sich folgendermaßen anschaulich deuten:

$$(4.21) \quad u_j|_{\partial D_k} \equiv \xi_k(Y_j) = C_{jk},$$

$$(4.22) \quad \xi^k(Y^i) = C^{ik}.$$

Nach (4.16) und (4.13) folgt

$$(4.23) \quad u^i|_{\partial D_k} = \delta_{ik}.$$

Wir haben nun das nötige Rüstzeug, um die Potentialfelder  $E_0^{\psi_j}$  und  $E_0^{\tilde{\psi}_i}$  zu diskutieren. Dazu genügt es nach (4.17), die Ergiebigkeiten dieser Felder zu berechnen. Wir beginnen mit

$$E_0^{\psi_j}(x) = \underbrace{\nabla_x \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) a'_j(y) \, dF_y}_{=: E_1(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) \lambda_j(y) n_y \, dF_y}_{=: E_2(x)}.$$

Wegen  $\lambda_j|_{\partial D_k} = \text{const.} =: \lambda_{j, \partial D_k}$  können wir  $E_2$  umformen zu

$$\begin{aligned} E_2(x) &= - \sum_{k=1}^n \lambda_{j, \partial D_k} \int_{\partial D_k} \phi_0(x, y) n_y \, dF_y \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} - \sum_{k=1}^n \lambda_{j, \partial D_k} \int_{D_k} \nabla_y \phi_0(x, y) \, dy \\ &= \nabla_x \sum_{k=1}^n \int_{D_k} \lambda_{j, \partial D_k} \phi_0(x, y) \, dy \\ &= \nabla u(x) \end{aligned}$$

mit

$$u(x) := \sum_{k=1}^n \int_{D_k} \phi_0(x, y) \lambda_{j, \partial D_k} dy.$$

Nach Lemma 2.3 ist das Volumenpotential  $u(x)$  stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}^3$  und erfüllt die Gleichung

$$\Delta u = -\lambda_{j, \partial D_k} \quad \text{in } D_k.$$

Damit können wir die Ergiebigkeiten von  $E_2$  berechnen:

$$\begin{aligned} \xi^k(E_2) &= \int_{\partial D_k} \mathbf{n} \cdot E_2 dF = \int_{\partial D_k} \mathbf{n} \cdot (\nabla u) dF \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{D_k} \Delta u dx \\ &= - \int_{D_k} \lambda_{j, \partial D_k} dx \\ &= -\lambda_{j, \partial D_k} |D_k|, \end{aligned}$$

wobei  $|D_k| = \int_{D_k} dx$  den Inhalt von  $D_k$  bezeichnet. Nun sind noch die Ergiebigkeiten von  $E_1$  zu bestimmen. Dabei müssen wir die Sprungbedingung für Vektorpotentiale beachten: Nach Lemma 2.2 gilt für  $x \in \partial\Omega$

$$E_{1,+}(x) = E_{1,-}(x) - \mathbf{n} \times \mathbf{a}'_j(x).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \xi^k(E_1) &= \int_{\partial D_k} \mathbf{n} \cdot E_{1,+} dF \\ &= \int_{\partial D_k} \left( \mathbf{n} \cdot E_{1,-} - \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{a}'_j)}_{=0} \right) dF \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{D_k} \nabla \cdot E_1 dx \\ &= \int_{D_k} \nabla \cdot \left( \underbrace{\nabla \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) \mathbf{a}'_j(y) dF_y}_{=0} \right) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir **wählen** nun die Basis  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0)$  mit

$$(4.24) \quad \lambda_j \equiv -|D_k|^{-1} \delta_{jk} \quad \text{auf } \partial D_k$$

(vgl. Lemma 4.1) sowie eine beliebige reelle Basis  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}_0)$  und bestimmen daraus nach Lemma 4.4 die elektrischen und magnetischen Eigenfunktionen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  bzw.  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p$ . Dann gilt

$$\xi^k(E_0^{\psi_j}) = \xi^k(E_1) + \xi^k(E_2) = \delta_{jk} + 0 = \delta_{jk}$$

und somit nach (4.17)

$$(4.25) \quad E_0^{\psi_j} = Y_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Für

$$E_0^{\tilde{\psi}_i}(x) = \nabla_x \times \int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) \alpha_i(y) dF_y$$

erhalten wir wie bei  $E_1$

$$\xi^k(E_0^{\tilde{\psi}_i}) = 0.$$

Wiederum nach (4.17) gilt also

$$(4.26) \quad E_0^{\tilde{\psi}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, p.$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß nach unserer speziellen Basiswahl die elektrischen Eigenfunktionen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  gerade die kovariante Basis von  $\mathcal{N}(A)$  erzeugen. Die von den magnetischen Eigenfunktionen  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p$  erzeugten Potentialfelder verschwinden in  $\Omega$  identisch.

Wir wollen nun die Projektionen der vorgegebenen Randwerte  $\begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$  auf die adjungierten elektrischen Eigenfunktionen  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \dots, \varphi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_n \end{pmatrix}$  von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0$  physikalisch interpretieren. Dazu definieren wir zu einer reellen Basis  $\mu_1, \dots, \mu_n$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$

$$(4.27) \quad u^{\varphi_j}(x) := \int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) \mu_j(y) dF_y \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Nach Lemma 2.1 (bzw. (2.41) und (2.46)) folgt aus  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)\varphi_j = (\mathbf{I} + \mathbf{K}'_k)\mu_j = 0$ , daß  $\frac{\partial u^{\varphi_j}}{\partial n} = 0$  auf  $\partial\Omega$  gilt. Wegen  $\Delta u^{\varphi_j} = 0$  in  $D$  ist

$$(4.28) \quad \int_D |\nabla u^{\varphi_j}|^2 dx \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} u^{\varphi_j} \frac{\partial u^{\varphi_j}}{\partial n} dF = 0$$

und daher  $\nabla u^{\varphi_j} = 0$  in  $D$ .  $u^{\varphi_j}$  ist insbesondere konstant auf jeder Komponente  $\partial D_k$  von  $\partial\Omega$ . Hieraus folgt

$$\mathbf{n} \times (-\nabla u^{\varphi_j}) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und wegen  $\Delta(-\nabla u^{\varphi_j}) = -\nabla(\Delta u^{\varphi_j}) = 0$  in  $\Omega$  und  $-\nabla u^{\varphi_j} = O(|x|^{-2})$  für  $|x| \rightarrow \infty$  liegen die Felder  $-\nabla u^{\varphi_j}$  in  $\mathcal{N}(A)$ . Nach Lemma 2.1 gilt

$$(4.29) \quad \mathbf{n} \cdot (-\nabla u^{\varphi_j}) = -\frac{\partial u^{\varphi_j}}{\partial n} = \mu_j \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und die Felder

$$-\nabla u^{\varphi_1}, \dots, -\nabla u^{\varphi_n}$$

sind linear unabhängig. Wegen  $\dim \mathcal{N}(A) = n$  bilden sie eine Basis von  $\mathcal{N}(A)$ . Wir **wählen** in  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{K}'_0)$  nach (4.29) die Basis

$$(4.30) \quad \mu_1 := \mathbf{n} \cdot \gamma^1|_{\partial\Omega}, \dots, \mu_n := \mathbf{n} \cdot \gamma^n|_{\partial\Omega}$$

sowie eine beliebige Basis  $b_1, \dots, b_p$  von  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0)$  und bestimmen nach Lemma 4.5 die adjungierten elektrischen und magnetischen Eigenfunktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  bzw.  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p$ . Nach (4.29) gilt dann

$$-\nabla u^{\varphi_j} = \gamma^j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und wegen  $u^{\varphi_j} \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  und (4.20) auch

$$(4.31) \quad u^{\varphi_j} = u^j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \varphi_j \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \gamma_0, \mu_j \rangle \\ &\stackrel{(2.19), (2.16)}{=} \int_{\partial\Omega} \mu_j(x) \left( -\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \phi_0(x, y) F(y) dy \right) dF_x \\ &= - \int_{\partial\Omega} \mu_j(x) \int_{\Omega} (\nabla_x \phi_0(x, y)) \cdot F(y) dy dF_x \\ &= - \int_{\Omega} F(y) \cdot \int_{\partial\Omega} (-\nabla_y \phi_0(x, y)) \mu_j(x) dF_x dy \\ &= \int_{\Omega} F(y) \cdot \left( \nabla_y \int_{\partial\Omega} \phi_0(y, x) \mu_j(x) dF_x \right) dy \\ &\stackrel{(4.27)}{=} \int_{\Omega} F(y) \cdot (\nabla_y u^{\varphi_j}(y)) dy \\ &= - \int_{\Omega} F \cdot Y^j dy \\ &= -(F, Y^j). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist erlaubt, da der Integrand über dem vollen Integrationsbereich absolut integrierbar ist. Das Integral über  $\Omega$  erstreckt sich nur auf ein endliches Gebiet, da  $\text{supp}(F)$  beschränkt ist. Im letzten Schritt beachte man, daß  $Y^j$  reell ist. Die Projektionen der Randwerte auf die adjungierten elektrischen Eigenfunktionen entsprechen also den Projektionen von  $F$  auf die kontravariante Basis von  $\mathcal{N}(A)$ . Mit der Dualitätsbeziehung (4.18) läßt sich die Projektion  $P_{+0}$  von  $L_2(\Omega)$  auf  $\mathcal{N}(A)$  folgendermaßen darstellen:

$$(4.32) \quad -P_{+0}F = - \sum_{j=1}^n (F, Y^j) Y_j = \sum_{j=1}^n \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \varphi_j \right\rangle Y_j.$$

Der Vollständigkeit halber geben wir die Projektionen der Randwerte auf die adjungierten magnetischen Eigenfunktionen an:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \tilde{\varphi}_i \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i \\ \mu'_i \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{\partial\Omega} b_i(x) \cdot \left( -n_x \times \int_{\Omega} \phi_0(x, y) F(y) dy \right) dF_x + \int_{\partial\Omega} \mu'_i(x) \left( -\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \phi_0(x, y) F(y) dy \right) dF_x \\ &= - \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} b_i(x) \cdot (n_x \times \phi_0(x, y) F(y)) dy dF_x - \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \mu'_i(x) (\nabla_x \phi_0(x, y)) \cdot F(y) dy dF_x \\ &= \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} F(y) \cdot \phi_0(x, y) (n_x \times b_i(x)) dF_x dy + \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} F(y) \cdot (\nabla_y \phi_0(x, y) \mu'_i(x)) dF_x dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \left( \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (\mathbf{n}_x \times \mathbf{b}_i(\mathbf{x})) \, dF_x + \nabla_{\mathbf{y}} \int_{\partial\Omega} \phi_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mu_i'(\mathbf{x}) \, dF_x \right) \, d\mathbf{y} \\
&\stackrel{(2.41)}{=} \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}_0^{(\mathbf{b}_i, \mu_i')} \, d\mathbf{y} \\
&= (\mathbf{F}, \mathbf{H}_0^{(\mathbf{b}_i, \mu_i')}).
\end{aligned}$$

Wegen  $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_i \\ \mu_i' \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  erfüllt  $\mathbf{H}_0^{(\mathbf{b}_i, \mu_i')}$  im *Innenraum* nach (2.46) die homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}_{0,-}^{(\mathbf{b}_i, \mu_i')}) &= 0, \\
\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_{0,-}^{(\mathbf{b}_i, \mu_i')} &= 0,
\end{aligned}$$

nicht jedoch im Außenraum  $\Omega$ . Dort lassen sich diese Felder und damit die berechneten Projektionen nicht unmittelbar interpretieren.

Wir haben in diesem Abschnitt eine spezielle Wahl der elektrischen Eigenfunktionen getroffen, die wir für den Rest des Kapitels beibehalten. An die magnetischen Eigenfunktionen stellen wir keine weiteren Anforderungen; es sollen lediglich die Orthogonalitätsrelationen (4.4) und (4.8) erfüllt sein.

### 4.3 Abschätzungen für $\kappa \rightarrow 0$

Wir verwenden wie in Kapitel 3 die Landau-Notation zur Darstellung von Abschätzungen für  $\kappa \rightarrow 0$ . Wir schreiben kurz  $\|\cdot\|$  für die Höldernorm  $\|\cdot\|_{\alpha}$  auf  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  sowie für die induzierten Normen auf Teilräumen von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ;  $\alpha \in (0, 1)$  sei für die folgenden Untersuchungen beliebig, aber fest gewählt. Bei beschränkten linearen Operatoren zwischen Banachräumen steht  $\|\cdot\|$  für die Operatornorm. Die Bezeichnung

$$\mathbf{x}_{\kappa} = \mathbf{y}_{\kappa} + \mathcal{O}(|\kappa|^j) \quad \text{bedeutet} \quad \|\mathbf{x}_{\kappa} - \mathbf{y}_{\kappa}\| = \mathcal{O}(|\kappa|^j)$$

für Vektoren  $\mathbf{x}_{\kappa}, \mathbf{y}_{\kappa} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und  $j \in \mathbb{Z}$ . Aufgrund der Stetigkeit des Innenproduktes folgt hieraus

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_{\kappa} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_{\kappa} \rangle + \mathcal{O}(|\kappa|^j) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega).$$

Die Bezeichnung

$$\mathbf{A}_{\kappa} = \mathbf{B}_{\kappa} + \mathcal{O}(|\kappa|^j) \quad \text{bedeutet} \quad \|\mathbf{A}_{\kappa} - \mathbf{B}_{\kappa}\| = \mathcal{O}(|\kappa|^j)$$

für beschränkte lineare Operatoren  $\mathbf{A}_{\kappa}, \mathbf{B}_{\kappa}$  zwischen Unterräumen von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ . Insbesondere folgt aus

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\kappa} &= \mathcal{O}(|\kappa|^i), \\
\mathbf{A}_{\kappa} &= \mathcal{O}(|\kappa|^j)
\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\mathbf{A}_{\kappa} \mathbf{x}_{\kappa} = \mathcal{O}(|\kappa|^{i+j}).$$

Für Vektorfelder  $\mathbf{E}_{\kappa}, \mathbf{F}_{\kappa}$  in  $\overline{\Omega}$  (bzw. in  $\overline{D}$ ) bedeutet die Bezeichnung

$$\mathbf{E}_{\kappa} = \mathbf{F}_{\kappa} + \mathcal{O}(|\kappa|^j),$$

daß die Abschätzung

$$|\mathbf{E}_{\kappa}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_{\kappa}(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\kappa|^j)$$

gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$  (bzw. in ganz  $\overline{D}$ ) gilt. Skalare Felder sind entsprechend zu interpretieren. Die Verwendung von Landau-Symbolen impliziert im folgenden stets den Grenzübergang  $\kappa \rightarrow 0$ . Es sei daran erinnert, daß  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt in  $L_2(\Omega)$  bezeichnet. Wir nehmen jedoch keine Abschätzungen bezüglich dieses Skalarproduktes oder der  $L_2$ -Norm vor.

Ausgangspunkt für alle benötigten Abschätzungen ist die **Reihenentwicklung** der Grundlösung:

$$\begin{aligned}
 \phi_\kappa(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |x-y|^k (i\kappa)^k \\
 (4.33) \quad &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\kappa)^k}{k!} |x-y|^{k-1} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x-y|} + i\kappa - \frac{\kappa^2}{2} |x-y| - \frac{i\kappa^3}{6} |x-y|^2 \right) + O(|\kappa|^4),
 \end{aligned}$$

die gleichmäßig für  $|x-y| \leq C$  gilt. Insbesondere ist die Differenz

$$\phi_\kappa(x, y) - \phi_0(x, y)$$

mitsamt der ersten Ableitungen nach  $x$  oder  $y$  beschränkt für  $x \rightarrow y$  und die Ableitungen können durch gliedweises Differenzieren gewonnen werden. Von entscheidender Bedeutung ist die Abschätzung

$$(4.34) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_\kappa(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_0(x, y) - \frac{\kappa^2}{8\pi} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} - \frac{i\kappa^3}{12\pi} (x_i - y_i) + O(|\kappa|^4)$$

gleichmäßig für  $|x-y| \leq C$  und  $i = 1, 2, 3$ . Eine ähnliche Entwicklung gilt für die zweiten Ableitungen. Dabei tritt im  $\kappa^2$ -Term eine Singularität der Ordnung  $|x-y|^{-1}$  auf, die jedoch über  $\partial\Omega$  absolut integrierbar ist. Aus diesem Grund übertragen sich die Reihenentwicklungen auf die betrachteten Integraloperatoren (hier im Sinn der Operatornormen). Speziell gilt

$$(4.35) \quad \mathbf{L}_\kappa = \mathbf{L}_0 + \kappa \mathbf{L}_{(1)} + \kappa^2 \mathbf{L}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{L}_{(3)} + O(|\kappa|^4)$$

bzw.

$$(4.36) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_0) + \kappa \mathbf{L}_{(1)} + \kappa^2 \mathbf{L}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{L}_{(3)} + O(|\kappa|^4)$$

und eine entsprechende Entwicklung für  $\mathbf{L}'_\kappa$ . Die Glieder  $\mathbf{L}_{(1)}, \mathbf{L}_{(2)}, \mathbf{L}_{(3)}$  entstehen dabei, indem man die entsprechenden Glieder der Reihenentwicklung (4.33) anstelle von  $\phi_\kappa(x, y)$  in die Definitionen der Integraloperatoren einsetzt.

Die entsprechenden Reihen für Potentialfelder konvergieren gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$  (bzw. in ganz  $\overline{D}$ ). Beispielsweise besitzt das von  $(\frac{a}{\lambda}) \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  erzeugte elektrische Potentialfeld  $E_\kappa^{(a,\lambda)}$  die Reihenentwicklung

$$(4.37) \quad E_\kappa^{(a,\lambda)} = E_0^{(a,\lambda)} + \kappa E_{(1)}^{(a,\lambda)} + \kappa^2 E_{(2)}^{(a,\lambda)} + \kappa^3 E_{(3)}^{(a,\lambda)} + O(|\kappa|^4)$$

gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$  bzw.  $\overline{D}$ . Die Terme der Ordnung  $O(\kappa)$  und höher sind mitsamt ihren ersten Ableitungen gleichmäßig hölderstetig in beschränkten Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$  und es



darf jeweils unter dem Integralzeichen differenziert werden. Damit folgt aus (2.43) die Entwicklung

(4.38)

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\kappa,+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{\kappa,+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{0,+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{0,+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} + 2\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{(1),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{(1),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} + 2\kappa^2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{(2),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{(2),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} + 2\kappa^3 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{(3),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{(3),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} + O(|\kappa|^4) \end{aligned}$$

in  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und hieraus

$$(4.39) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{L})_{(i)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{(i)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{(i),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{(i),+}^{(\mathbf{a},\lambda)} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Wir werden diese Formel später zur Berechnung von  $\mathbf{L}_{(i)}$  heranziehen. Einsetzen von (4.33) und (4.34) in die Definition (2.38) ergibt speziell

$$(4.40) \quad \mathbf{E}_{(i)}^{(\mathbf{a},\lambda)}(\mathbf{x}) = -\frac{i}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \lambda(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{\mathbf{y}} dF_{\mathbf{y}} = \text{const.}$$

Um später von asymptotischen Abschätzungen der Oberflächenbelegung  $x_\kappa = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  auf die Asymptotik der Lösung des ERP (in Form des von  $x_\kappa$  erzeugten Potentialfeldes) rückschließen zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.6.** *Es existiert eine nur von der Geometrie der Reflektoren  $D_1, \dots, D_n$  abhängige Konstante  $C > 0$  so, daß für alle  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  und alle  $\kappa \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im } \kappa \geq 0$*

$$\left| \mathbf{E}_\kappa^{(\mathbf{a},\lambda)}(\mathbf{x}) \right| \leq C \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$$

gilt.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den von  $\lambda$  erzeugten Anteil des Potentialfeldes:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}) := -\mathbf{E}_\kappa^{(0,\lambda)} = \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{\mathbf{y}} dF_{\mathbf{y}}.$$

Die Komponenten  $\mathbf{E}^{(1)} = (\mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{E}_3^{(1)})$  lassen sich als skalare Potentiale der Oberflächenbelegungen  $\lambda \mathbf{n} = (\lambda n_1, \lambda n_2, \lambda n_3)$  deuten. Nach [1], Satz 2.12 gilt daher  $\|\mathbf{E}_i^{(1)}\|_{\alpha, \overline{\Omega}} \leq C_1 \|\lambda\|_{\infty, \partial\Omega}$  für eine Konstante  $C_1 > 0$  (da wir  $\alpha$  als fest gewählt voraussetzen, brauchen wir die  $\alpha$ -Abhängigkeit dieser Konstanten nicht zu berücksichtigen) und  $i = 1, 2, 3$ . Damit gilt die Abschätzung

$$\left| \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}) \right| \leq \|\mathbf{E}^{(1)}\|_{\infty, \overline{\Omega}} \leq \|\mathbf{E}^{(1)}\|_{\alpha, \overline{\Omega}} \leq 3C_1 \|\lambda\|_{\infty, \partial\Omega} \leq 3C_1 \|\lambda\|_{\alpha, \partial\Omega} = 3C_1 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| \leq 3C_1 \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|$$

für  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ . Entsprechend erhalten wir für die Komponenten  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  des Vektorpotentials

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a}(\mathbf{y}) dF_{\mathbf{y}}$$

aus [1], Satz 2.17 die Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} A_j(x) \right| \leq C_2 \|a\|_{\alpha, \partial\Omega} \leq C_2 \left\| \begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|$$

für eine Konstante  $C_2 > 0$  und  $i, j = 1, 2, 3$ . Hieraus folgt

$$\left| E_\kappa^{(a,0)}(x) \right| = |\nabla \times A(x)| \leq 6C_2 \left\| \begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|$$

für  $x \in \overline{\Omega}$  und insgesamt

$$\left| E_\kappa^{(a,\lambda)}(x) \right| \leq \underbrace{(3C_1 + 6C_2)}_{=: C} \left\| \begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|.$$

□

Mit Hilfe von Lemma 4.6 folgt für von  $\kappa$  abhängige Oberflächenbelegungen  $\begin{pmatrix} a_\kappa \\ \lambda_\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_\kappa \\ \mu_\kappa \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ , die die Abschätzung

$$\begin{pmatrix} a_\kappa \\ \lambda_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\kappa \\ \mu_\kappa \end{pmatrix} + O(|\kappa|^j)$$

erfüllen, eine entsprechende *punktweise* Abschätzung für die von diesen Oberflächenbelegungen erzeugten Potentialfelder gleichmäßig in  $\overline{\Omega}$ :

$$E_\kappa^{(a_\kappa, \lambda_\kappa)} = E_\kappa^{(b_\kappa, \mu_\kappa)} + O(|\kappa|^j).$$

## 4.4 Die Matrixgleichung des ERP

### 4.4.1 Aufstellen der Matrixgleichung

Zur Diskussion des ERP haben wir nach Satz 2.3 eine Lösung  $x_\kappa = \begin{pmatrix} a_\kappa \\ \lambda_\kappa \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  der Integralgleichung

$$(4.41) \quad 2y_\kappa = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x_\kappa$$

zu bestimmen, wobei wir abkürzend für die Randbedingungen

$$y_\kappa := \begin{pmatrix} c_\kappa \\ \gamma_\kappa \end{pmatrix}$$

schreiben. Zur Anwendung der Matrix-Methode zerlegen wir (4.41) in eine Matrixgleichung. Angesichts der unterschiedlichen Eigenschaften von elektrischen und magnetischen Eigenfunktionen bietet sich dabei eine dreifache Aufspaltung von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  an, und zwar in der Bezeichnungsweise von 4.1 in

$$(4.42) \quad \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) = \text{sp} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \} \oplus \text{sp} \{ \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p \} \oplus \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^\perp$$

im Urbildraum und

$$(4.43) \quad \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega) = \text{sp} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \} \oplus \text{sp} \{ \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p \} \oplus \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^\perp$$

im Bildraum. Die in diesen Zerlegungen auftretenden Unterräume von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  sind jeweils paarweise orthogonal.<sup>5</sup> Wir bestimmen nach Lemma 4.3 duale Basen

$$\begin{aligned} \psi^1, \dots, \psi^n & \quad \text{zu} \quad \psi_1, \dots, \psi_n, \\ \tilde{\psi}^1, \dots, \tilde{\psi}^p & \quad \text{zu} \quad \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p, \\ \varphi^1, \dots, \varphi^n & \quad \text{zu} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n, \end{aligned}$$

und

$$\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \quad \text{zu} \quad \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p.$$

Dabei bleiben die Orthogonalitätseigenschaften erhalten und folglich gelten in  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  insgesamt die **Dualitätsrelationen**

$$\begin{aligned} \langle \psi_i, \psi^j \rangle &= \delta_{ij}, & \langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}^l \rangle &= \delta_{kl}, \\ \langle \psi_i, \tilde{\psi}_k \rangle &= \langle \psi_i, \tilde{\psi}^k \rangle = \langle \psi^i, \tilde{\psi}_k \rangle = \langle \psi^i, \tilde{\psi}^k \rangle = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i, \varphi^j \rangle &= \delta_{ij}, & \langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}^l \rangle &= \delta_{kl}, \\ \langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_k \rangle &= \langle \varphi_i, \tilde{\varphi}^k \rangle = \langle \varphi^i, \tilde{\varphi}_k \rangle = \langle \varphi^i, \tilde{\varphi}^k \rangle = 0 \end{aligned}$$

jeweils für  $i, j = 1, \dots, n$  und  $k, l = 1, \dots, p$ . Wir verwenden später aus praktischen Gründen die Basen

$$(4.44) \quad \psi_1, \dots, \psi_n, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p \quad \text{in} \quad \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$$

und

$$(4.45) \quad \varphi^1, \dots, \varphi^n, \tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \quad \text{in} \quad \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0).$$

Daher führen wir **Projektionsoperatoren** in der folgenden Form<sup>6</sup> ein:

$$(4.46) \quad \mathbf{P}_1 x := \sum_{j=1}^n \langle x, \psi^j \rangle \psi_j \qquad \mathbf{P}_2 x := \sum_{i=1}^p \langle x, \tilde{\psi}^i \rangle \tilde{\psi}_i$$

$$(4.47) \quad \mathbf{Q}_1 y := \sum_{j=1}^n \langle y, \varphi_j \rangle \varphi^j \qquad \mathbf{Q}_2 y := \sum_{i=1}^p \langle y, \tilde{\varphi}_i \rangle \tilde{\varphi}^i$$

für  $x, y \in \mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ . Diese Projektionsoperatoren liefern orthogonale Zerlegungen

$$x = \mathbf{P}_1 x + \mathbf{P}_2 x + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)x \quad \text{gemäß} \quad (4.42)$$

und

$$y = \mathbf{Q}_1 y + \mathbf{Q}_2 y + (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)y \quad \text{gemäß} \quad (4.43).$$

<sup>5</sup>Dies aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der in Abschnitt 4.1 eingeführten Basen der Nullräume.

<sup>6</sup>Die in den Definitionen der Projektionsoperatoren auftretenden Innenprodukte entsprechen nämlich gerade den Komponenten von  $x$  und  $y$  bezüglich der in  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)$  gewählten Basen.

Wir können nun die Matrixzerlegung von (4.41) durchführen: Wir setzen

$$(4.48) \quad x_\kappa^{(1)} := (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)x_\kappa, \quad x_\kappa^{(2)} := \mathbf{P}_2x_\kappa, \quad x_\kappa^{(3)} := \mathbf{P}_1x_\kappa,$$

$$(4.49) \quad y_\kappa^{(1)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)y_\kappa, \quad y_\kappa^{(2)} := \mathbf{Q}_2y_\kappa, \quad y_\kappa^{(3)} := \mathbf{Q}_1y_\kappa.$$

Dabei sind  $x_\kappa^{(1)}$  und  $y_\kappa^{(1)}$  Elemente von unendlichdimensionalen Vektorräumen;  $x_\kappa^{(2)}, y_\kappa^{(2)}$  entstammen den  $p$ -dimensionalen Räumen der magnetischen und adjungierten magnetischen Eigenfunktionen und  $x_\kappa^{(3)}, y_\kappa^{(3)}$  den  $n$ -dimensionalen Räumen der elektrischen und adjungierten elektrischen Eigenfunktionen. Für die Blockoperatoren von  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa$  führen wir abkürzende Bezeichnungen ein:

$$(4.50) \quad \begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)} &:= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(12)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_2\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \mathbf{A}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(13)} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_1\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(21)} := \mathbf{Q}_2(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \mathbf{B}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(31)} := \mathbf{Q}_1(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \tilde{\mathbf{D}}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(22)} := \mathbf{Q}_2(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_2\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \mathbf{D}_\kappa &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(33)} := \mathbf{Q}_1(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_1\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \mathbf{N}_\kappa^{(1)} &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(23)} := \mathbf{Q}_2(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_1\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \\ \mathbf{N}_\kappa^{(2)} &:= (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(32)} := \mathbf{Q}_1(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)|_{\mathbf{P}_2\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Die **Matrixgleichung** des ERP (d.h. die Matrixzerlegung von Gleichung (4.41)) lautet mit diesen Bezeichnungen:

$$(4.51) \quad 2 \begin{pmatrix} y_\kappa^{(1)} \\ \hline y_\kappa^{(2)} \\ \hline y_\kappa^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)} & \tilde{\mathbf{A}}_\kappa & \mathbf{A}_\kappa \\ \hline \tilde{\mathbf{B}}_\kappa & \tilde{\mathbf{D}}_\kappa & \mathbf{N}_\kappa^{(1)} \\ \hline \mathbf{B}_\kappa & \mathbf{N}_\kappa^{(2)} & \mathbf{D}_\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\kappa^{(1)} \\ \hline x_\kappa^{(2)} \\ \hline x_\kappa^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Die Aufteilung der Matrix soll dabei die Unterscheidung zwischen endlichdimensionalen und unendlichdimensionalen Unterräumen von  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$  erleichtern.

#### 4.4.2 Asymptotik der Blockoperatoren

Der nächste Schritt der Matrix-Methode besteht darin, Abschätzungen für das Verhalten der Blockoperatoren für  $\kappa \rightarrow 0$  zu finden. Wir werden diese Abschätzungen als eine Reihe von Behauptungen formulieren. Zunächst gilt nach der Reihentwicklung (4.36) für alle Blockoperatoren

$$(4.52) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(ij)} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(ij)} + \mathcal{O}(|\kappa|) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Die Matrixzerlegung ist so gewählt, daß nach der zweiten Fredholmschen Alternative  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(11)}$  invertierbar ist und

$$(4.53) \quad \tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{N}_0^{(1)} = \mathbf{N}_0^{(2)} = 0$$

gilt (vgl. die Erläuterungen zu (3.13)). Alle diese Blockoperatoren sind also von der Ordnung  $O(|\kappa|)$  für  $\kappa \rightarrow 0$ . Wir berechnen nun für einzelne Operatoren und die vorgegebenen Randwerte feinere Abschätzungen.

**Beh. 4.1.**

$$\mathbf{N}_\kappa^{(2)} = 0.$$

*Beweis.*  $\mathbf{N}_\kappa^{(2)}$  ist ein Operator zwischen endlichdimensionalen Räumen:

$$\mathbf{N}_\kappa^{(2)} : \text{sp} \{ \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p \} \longrightarrow \text{sp} \{ \varphi^1, \dots, \varphi^n \}.$$

Es genügt daher, die Komponenten von  $\mathbf{N}_\kappa^{(2)}$  bezüglich der angegebenen Basen zu berechnen. Für  $i = 1, \dots, p$  und  $j = 1, \dots, n$  gilt aber

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j, \mathbf{N}_\kappa^{(2)} \tilde{\psi}_i \rangle &= \langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \tilde{\psi}_i \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix}, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\stackrel{(2.36), (2.37)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{M}_\kappa) \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Wir können Abschätzungen für die Blockoperatoren  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(i2)}$  und  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(i3)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit Hilfe von Formel (4.38) aus entsprechenden Abschätzungen für die Potentialfelder  $E_\kappa^{\psi_1}, \dots, E_\kappa^{\psi_n}$  und  $E_\kappa^{\tilde{\psi}_1}, \dots, E_\kappa^{\tilde{\psi}_p}$  gewinnen. Daher berechnen wir zunächst die Asymptotik dieser Potentialfelder.

**Lemma 4.7.**

$$\begin{aligned} E_\kappa^{\tilde{\psi}_i} &= O(|\kappa|^2) \quad (i = 1, \dots, p) \\ E_\kappa^{\psi_j} &= E_0^{\psi_j} + O(|\kappa|^2) \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach (4.37) und (4.40) gilt die Reihenentwicklung

$$(4.54) \quad E_\kappa^{(\alpha, \lambda)} = E_0^{(\alpha, \lambda)} - \frac{i\kappa}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \lambda(y) n_y \, dF_y + O(|\kappa|^2),$$

wobei der zweite Term ein in  $\bar{\Omega}$  konstantes Vektorfeld ist. Für  $\tilde{\psi}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}$  verschwindet dieser Term, und es folgt aus (4.26)

$$E_\kappa^{\tilde{\psi}_i} = E_\kappa^{(\alpha_i, 0)} = E_0^{\tilde{\psi}_i} + O(|\kappa|^2) \stackrel{(4.26)}{=} O(|\kappa|^2)$$

für  $i = 1, \dots, p$ . Für  $\psi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \lambda_j \end{pmatrix}$  untersuchen wir zunächst den zweiten Term. Nach Lemma 4.1 nimmt  $\lambda_j$  auf jeder Komponente  $\partial D_k$  von  $\partial\Omega$  den konstanten Wert  $\lambda_{j, \partial D_k}$  an. Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \lambda_j(y) n_y \, dF_y &= \sum_{k=1}^n \lambda_{j, \partial D_k} \int_{\partial D_k} n_y \, dF_y \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_{j, \partial D_k} \int_{D_k} \nabla(1) \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt für  $j = 1, \dots, n$  wie oben

$$E_{\kappa}^{\psi_j} = E_{\kappa}^{(\alpha'_j, \lambda_j)} = E_0^{(\alpha'_j, \lambda_j)} - \frac{i\kappa}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \lambda_j(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{\mathbf{y}} dF_{\mathbf{y}} + O(|\kappa|^2) = E_0^{\psi_j} + O(|\kappa|^2).$$

□

**Beh. 4.2.**

$$\mathbf{A}_{\kappa}, \tilde{\mathbf{A}}_{\kappa}, \mathbf{N}_{\kappa}^{(1)} = O(|\kappa|^2).$$

*Beweis.* Die Definitionsräume der genannten Operatoren sind endlichdimensional; daher genügt es, jeweils die Bildvektoren einer Basis abzuschätzen. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\kappa} &: \text{sp} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^{\perp}, \\ \mathbf{N}_{\kappa}^{(1)} &: \text{sp} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \} \longrightarrow \text{sp} \{ \tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.7 und (4.37) gilt  $E_{(1)}^{\psi_j} = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Nach (4.39) folgt hieraus  $\mathbf{L}_{(1)}\psi_j = 0$  und mit (4.36)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})\psi_j = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)\psi_j + O(|\kappa|^2) \stackrel{\psi_j \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)}{=} O(|\kappa|^2)$$

in  $\mathcal{X}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ . Da alle eingeführten Projektionsoperatoren beschränkt sind, erhalten wir hieraus

$$\mathbf{A}_{\kappa}\psi_j = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})\psi_j = O(|\kappa|^2)$$

und

$$\mathbf{N}_{\kappa}^{(1)}\psi_j = \mathbf{Q}_2(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})\psi_j = O(|\kappa|^2).$$

Auf analoge Weise ergibt sich für

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\kappa} : \text{sp} \{ \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p \} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^{\perp}$$

wegen  $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)$  und Lemma 4.7

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)\tilde{\psi}_i = \mathbf{L}_{(1)}\tilde{\psi}_i = 0$$

und daher nach (4.36)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})\tilde{\psi}_i = O(|\kappa|^2).$$

Hieraus folgt wiederum

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\kappa}\tilde{\psi}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})\tilde{\psi}_i = O(|\kappa|^2).$$

□

**Beh. 4.3.**

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa} &= O(|\kappa|), \\ \mathbf{B}_{\kappa} &= O(|\kappa|^2). \end{aligned}$$

*Beweis.* Die erste Behauptung  $\tilde{\mathbf{B}}_\kappa = O(|\kappa|)$  folgt sofort aus (4.53) und (4.52). Um  $\mathbf{B}_\kappa$  abzuschätzen genügt es, für alle  $x \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^\perp$  die Innenprodukte

$$\langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x \rangle$$

abzuschätzen, da

$$\|\mathbf{B}_\kappa x\| = \|\mathbf{Q}_1(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x \rangle \varphi_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x \rangle| \|\varphi_j\|$$

gilt. Zunächst führen wir die Innenprodukte auf den adjungierten Operator zurück:

$$\langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x \rangle = \langle (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \varphi_j, x \rangle.$$

Diese Innenprodukte berechnen wir mit Hilfe des von  $\varphi_j = \binom{0}{\mu_j}$  erzeugten magnetischen Potentialfeldes

$$H_\kappa^{(0, \mu_j)}(x) = \nabla_x \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(x, y) \mu_j(y) dF_y.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} H_\kappa^{(0, \mu_j)}(x) &= \nabla_x \left( \int_{\partial\Omega} \phi_0(x, y) \mu_j(y) dF_y + \frac{i\kappa}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mu_j(y) dF_y}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} \right) + O(|\kappa|^2) \\ &= H_0^{(0, \mu_j)}(x) + O(|\kappa|^2). \end{aligned}$$

Hieraus folgt analog zu (4.38) aus der Randwertformel (2.46) (vgl. den Beweis von Beh 4.2)

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \varphi_j &= (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \binom{0}{\mu_j} = 2 \binom{0}{\mathbf{n} \cdot H_{\kappa, -}^{(0, \mu_j)}} = 2 \binom{0}{\mathbf{n} \cdot H_{0, -}^{(0, \mu_j)}} + O(|\kappa|^2) \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0) \varphi_j + O(|\kappa|^2) \stackrel{\varphi_j \in \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)}{=} O(|\kappa|^2) \end{aligned}$$

und damit wegen der Stetigkeit des Innenprodukts

$$|\langle \varphi_j, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)x \rangle| = |\langle (\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \varphi_j, x \rangle| \leq C \underbrace{\|(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \varphi_j\|}_{=O(|\kappa|^2)} \|x\|,$$

woraus  $\mathbf{B}_\kappa = O(|\kappa|^2)$  folgt. □

**Beh. 4.4.** Für die vorgegebenen Randwerte  $y_\kappa$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} y_\kappa^{(1)} &= y_0^{(1)} + O(|\kappa|), \\ y_\kappa^{(2)} &= y_0^{(2)} + O(|\kappa|), \\ y_\kappa^{(3)} &= y_0^{(3)} + O(|\kappa|^2). \end{aligned}$$

*Beweis.* Durch Einsetzen der Entwicklung (4.33) in die Definitionen (2.16), (2.18) und (2.19) erhält man sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} c_\kappa &= c_0 + O(|\kappa|), \\ \gamma_\kappa &= \gamma_0 + O(|\kappa|^2), \end{aligned}$$

also  $y_\kappa = y_0 + O(|\kappa|)$ . Die feinere Abschätzung für  $y_\kappa^{(3)} = \mathbf{Q}_1 y_\kappa$  folgt aus

$$\langle y_\kappa, \varphi_j \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} c_\kappa \\ \gamma_\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \gamma_\kappa, \mu_j \rangle = \langle \gamma_0, \mu_j \rangle + O(|\kappa|^2) = \langle y_0, \varphi_j \rangle + O(|\kappa|^2).$$

□

Wir tragen die bisherigen Abschätzungen in die Matrixgleichung (4.51) ein:

$$(4.55) \quad \begin{pmatrix} y_0^{(1)} + O(|\kappa|) \\ y_0^{(2)} + O(|\kappa|) \\ y_0^{(3)} + O(|\kappa|^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(11)} + O(|\kappa|) & O(|\kappa|^2) & O(|\kappa|^2) \\ O(|\kappa|) & \tilde{\mathbf{D}}_\kappa & O(|\kappa|^2) \\ O(|\kappa|^2) & 0 & \mathbf{D}_\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\kappa^{(1)} \\ x_\kappa^{(2)} \\ x_\kappa^{(3)} \end{pmatrix}.$$

In der zweiten Zeile der Matrixgleichung begnügen wir uns dabei mit (gegenüber der ursprünglichen Formulierung der Matrix-Methode) größeren Abschätzungen, da die dieser Zeile entsprechenden magnetischen Eigenfunktionen keine „physikalischen“ Eigenschaften des ERP widerspiegeln.

Wir wenden uns schließlich den „Diagonaloperatoren“  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  und  $\mathbf{D}_\kappa$  zu. Wie bei Beh. 4.2 folgen aus Lemma 4.7 auch die Abschätzungen

$$\mathbf{D}_\kappa, \tilde{\mathbf{D}}_\kappa = O(|\kappa|^2).$$

In Analogie zur Voraussetzung (3.23) in Satz 3.1 müssen wir diese Operatoren bis zur Ordnung  $O(|\kappa|^4)$  abschätzen. Wir können die Matrix-Methode in der gegebenen Situation anwenden, sofern  $\mathbf{D}_\kappa$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  „in der Ordnung  $\kappa^2$  regulär sind.“ Genauer: Es ist zu zeigen, daß  $\mathbf{D}_\kappa$  eine Reihenentwicklung der Form

$$(4.56) \quad \mathbf{D}_\kappa = \kappa^2 \mathbf{D}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{D}_{(3)} + O(|\kappa|^4)$$

besitzt, wobei  $\mathbf{D}_{(2)}$  invertierbar ist. Da wir uns bei den magnetischen Eigenfunktionen mit größeren Abschätzungen begnügen, reicht es für die nachfolgenden Betrachtungen aus, für  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  eine Entwicklung der Form

$$(4.57) \quad \tilde{\mathbf{D}}_\kappa = \kappa^2 \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} + O(|\kappa|^3)$$

mit invertierbarem  $\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}$  nachzuweisen.  $\mathbf{D}_\kappa$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  sind Operatoren zwischen endlichdimensionalen Räumen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\kappa &: \text{sp} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \} \longrightarrow \text{sp} \{ \varphi^1, \dots, \varphi^n \}, \\ \tilde{\mathbf{D}}_\kappa &: \text{sp} \{ \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p \} \longrightarrow \text{sp} \{ \tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \}. \end{aligned}$$

Daher genügt es, ihre Komponenten bezüglich der angegebenen Basen zu betrachten.



**Beh. 4.5.** Es gilt

$$\tilde{\mathbf{D}}_\kappa = \kappa^2 \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} + O(|\kappa|^3)$$

mit einem invertierbaren Operator  $\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}$ .

*Beweis.* Sei  $(\tilde{\mathbf{D}}_{\kappa,ij})_{i,j=1\dots p}$  die Matrix des linearen Operators  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  bezüglich der Basen  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_p$  im Urbildraum und  $\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p$  im Bildraum. Dann gilt wegen  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa \tilde{\psi}_j = \sum_{k=1}^p \tilde{\mathbf{D}}_{\kappa,kj} \tilde{\varphi}^k$

$$\langle \tilde{\varphi}^i, \tilde{\mathbf{D}}_\kappa \tilde{\psi}_j \rangle = \sum_{k=1}^p \underbrace{\langle \tilde{\varphi}^i, \tilde{\varphi}^k \rangle}_{=\delta_{ik}} \tilde{\mathbf{D}}_{\kappa,kj} = \tilde{\mathbf{D}}_{\kappa,ij}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_{\kappa,ij} &= \langle \tilde{\varphi}^i, \tilde{\mathbf{D}}_\kappa \tilde{\psi}_j \rangle = \langle \tilde{\varphi}^i, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \tilde{\psi}_j \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i \\ \boldsymbol{\mu}'_i \end{pmatrix}, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i \\ \boldsymbol{\mu}'_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{M}_\kappa) \mathbf{a}_j \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{b}_i, (\mathbf{I} + \mathbf{M}_\kappa) \mathbf{a}_j \rangle \\ &= \langle (\mathbf{I} + \mathbf{M}'_\kappa) \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle \end{aligned}$$

und nach [1], 163f

$$= -2\kappa^2 \tilde{\Delta}_{ij} + O(|\kappa|^3),$$

wobei  $(\tilde{\Delta}_{ij})_{i,j=1\dots p}$  eine symmetrische und positiv definite, also invertierbare Matrix ist. Insbesondere gilt für die Matrix von  $\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}$  bezüglich der angegebenen Basen

$$(\tilde{\mathbf{D}}_{(2),ij})_{i,j=1\dots p} = (-2\tilde{\Delta}_{ij})_{i,j=1\dots p},$$

und  $\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}$  ist somit invertierbar. □

Zur Berechnung der Asymptotik von  $\mathbf{D}_\kappa$  führen wir die Komponenten dieses Operators auf *Innenraum*integrale über elektrostatische Potentiale zurück. Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen. Zu den adjungierten elektrischen Eigenfunktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  definieren wir in Anlehnung an (4.27):

$$(4.58) \quad \mathbf{u}_\kappa^{\varphi_j}(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} \phi_\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu_j(\mathbf{y}) dF_{\mathbf{y}}.$$

Die Felder  $\mathbf{u}_\kappa^{\varphi_j}$  sind nach Lemma 2.1 stetig in  $\mathbb{R}^3$ , und ihre ersten Ableitungen lassen sich stetig von  $D$  auf  $\bar{D}$  und von  $\Omega$  auf  $\bar{\Omega}$  fortsetzen. Wegen  $\varphi_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix}$  und Satz 2.4 gilt

$$\mathbf{H}_\kappa^{(0, \mu_j)} = \nabla \mathbf{u}_\kappa^{\varphi_j}$$

und damit nach (2.46)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_\kappa) \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_{\kappa,-}^{(0, \mu_j)} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\kappa,-}^{\varphi_j} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{\kappa,-}^{\varphi_j}}{\partial \mathbf{n}} \end{pmatrix}.$$

Nach (2.36) und (2.37) folgt aus der zweiten Zeile dieser Vektorgleichung

$$(4.59) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{K}'_\kappa) \mu_j = 2 \frac{\partial \mathbf{u}_{\kappa,-}^{\varphi_j}}{\partial \mathbf{n}}.$$

Für  $\kappa = 0$  sind nach (4.31) die Funktionen

$$\mathbf{u}_0^{\varphi_j} \stackrel{(4.27)}{=} \mathbf{u}^{\varphi_j}$$

in  $\bar{\Omega}$  identisch mit den elektrostatischen Potentialen  $u^j$  der kontravarianten Basis  $Y^1, \dots, Y^n$  von  $\mathcal{N}(A)$ . Insbesondere ist daher nach (4.23)

$$\mathbf{u}_0^{\varphi_j} = \mathbf{u}^j \equiv \delta_{jk} \quad \text{auf } \partial D_k.$$

Wegen (4.28) sind die Funktionen  $\mathbf{u}_0^{\varphi_j} = \mathbf{u}^{\varphi_j}$  konstant in jeder Komponente  $D_k$  von  $D$  und somit gilt

$$(4.60) \quad \mathbf{u}_0^{\varphi_j} \equiv \delta_{jk} \quad \text{in } D_k.$$

Wegen

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{0,+}^{\varphi_j}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{u}_+^{\varphi_j}}{\partial \mathbf{n}} \stackrel{(4.29)}{=} -\mu_j \quad \text{auf } \partial \Omega$$

gilt

$$(4.61) \quad \begin{aligned} \int_{\partial \Omega} \mu_j \, dF &= - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_{0,+}^{\varphi_j}}{\partial \mathbf{n}} \, dF \stackrel{(4.31)}{=} - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u^j}{\partial \mathbf{n}} \, dF \\ &= - \int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u^j \, dF \stackrel{(4.20)}{=} \int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot Y^j \, dF \\ &\stackrel{(4.11)}{=} \sum_{k=1}^n \xi^k(Y^j) \stackrel{(4.22)}{=} \sum_{k=1}^n C^{jk} \quad (\text{Ergiebigkeiten von } Y^j). \end{aligned}$$

**Beh. 4.6.** Es gilt

$$\mathbf{D}_\kappa = \kappa^2 \mathbf{D}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{D}_{(3)} + O(|\kappa|^4),$$

wobei  $\mathbf{D}_{(2)}$  regulär ist. Die einzelnen Terme besitzen bezüglich der Basen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  im Urbildraum und  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  im Bildraum die Komponenten

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{(2),ij})_{i,j=1\dots n} &= (2\delta_{ij})_{i,j=1\dots n} \\ (\mathbf{D}_{(3),ij})_{i,j=1\dots n} &= \left( \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n C^{ik} \right)_{i,j=1\dots n} \end{aligned}$$

*Beweis.* Wie bei  $\tilde{\mathbf{D}}_\kappa$  betrachten wir die Matrix

$$(\mathbf{D}_{\kappa,ij})_{i,j=1\dots n} = (\langle \varphi_i, \mathbf{D}_\kappa \psi_j \rangle)_{i,j=1\dots n} = (\langle \varphi_i, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \psi_j \rangle)_{i,j=1\dots n}$$

von  $\mathbf{D}_\kappa$  bezüglich der angegebenen Basen und entwickeln die einzelnen Komponenten nach Potenzen von  $\kappa$ . Wir berechnen nun die obigen Innenprodukte. Nach (2.36) und (2.37) gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \psi_j \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_i \end{pmatrix}, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa) \begin{pmatrix} a'_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{M}_\kappa) a'_j + \mathbf{L}_{12,\kappa} \lambda_j \\ (\mathbf{I} + \mathbf{K}_\kappa) \lambda_j \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \mu_i, (\mathbf{I} + \mathbf{K}_\kappa) \lambda_j \rangle \\ &= \langle (\mathbf{I} + \mathbf{K}'_\kappa) \mu_i, \lambda_j \rangle \\ &\stackrel{(4.59)}{=} 2 \int_{\partial \Omega} \lambda_j \frac{\partial \mathbf{u}_{\kappa,-}^{\varphi_i}}{\partial \mathbf{n}} \, dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.24)}{=} -2 \sum_{k=1}^n |D_k|^{-1} \delta_{jk} \int_{\partial D_k} \frac{\partial u_{\kappa,-}^{\varphi_i}}{\partial \mathbf{n}} dF \\
&= -2 |D_j|^{-1} \int_{\partial D_j} \frac{\partial u_{\kappa,-}^{\varphi_i}}{\partial \mathbf{n}} dF \\
&\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} -2 |D_j|^{-1} \int_{D_j} \Delta u_{\kappa}^{\varphi_i} dx.
\end{aligned}$$

Das Flächenpotential  $u_{\kappa}^{\varphi_i}$  erfüllt in  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$  die homogene Helmholtzgleichung, also gilt

$$\Delta u_{\kappa}^{\varphi_i} = -\kappa^2 u_{\kappa}^{\varphi_i},$$

und wir können weiter umformen:

$$\langle \varphi_i, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa}) \psi_j \rangle = 2\kappa^2 |D_j|^{-1} \int_{D_j} u_{\kappa}^{\varphi_i} dx.$$

Wir entwickeln das letzte Integral nach Potenzen von  $\kappa$ , indem wir die zu (4.37) analoge Entwicklung von  $u_{\kappa}^{\varphi_i}$  (vgl. Abschnitt 4.3),

$$u_{\kappa}^{\varphi_i}(x) = u_0^{\varphi_i}(x) + \frac{i\kappa}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mu_i(y) dF_y + O(|\kappa|^2),$$

in den Integranden einsetzen.<sup>7</sup> Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{D_j} u_{\kappa}^{\varphi_i} dx &= \int_{D_j} \underbrace{u_0^{\varphi_i}}_{\stackrel{(4.60)}{=} \delta_{ij}} dx + \frac{i\kappa}{4\pi} \int_{D_j} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mu_i(y) dF_y}_{\stackrel{(4.61)}{=} \sum_{k=1}^n C^{ik}} dx + O(|\kappa|^2) \\
&= \delta_{ij} |D_j| + \frac{i\kappa}{4\pi} |D_j| \left( \sum_{k=1}^n C^{ik} \right) + O(|\kappa|^2)
\end{aligned}$$

und insgesamt

$$\mathbf{D}_{\kappa,ij} = \langle \varphi_i, (\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa}) \psi_j \rangle = 2\kappa^2 \delta_{ij} + \frac{i\kappa^3}{2\pi} \sum_{k=1}^n C^{ik} + O(|\kappa|^4).$$

□

Da die Komponenten  $\mathbf{D}_{(3),ij}$  von  $\mathbf{D}_{(3)}$  nur vom Index  $i$  abhängen,<sup>8</sup> hat dieser Operator den Rang 1.

<sup>7</sup>Für die Vertauschbarkeit von Reihenentwicklung und Integration über  $D_j$  ist es von entscheidender Bedeutung, daß die Entwicklung von  $u_{\kappa}^{\varphi_i}$  gleichmäßig in  $D_j$  gilt. Hierin liegt auch der Grund, warum wir die Komponenten von  $\mathbf{D}_{\kappa}$  auf Innenraumintegrale zurückführen mußten, anstatt direkt mit den erzeugten Potentialfeldern in  $\Omega$  argumentieren zu können.

<sup>8</sup>Der Index  $i$  ist nicht zu verwechseln mit der imaginären Einheit  $i$ , die in der Konstanten  $\frac{i}{2\pi}$  auftritt.

#### 4.4.3 Auflösen der Matrixgleichung

Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 3.1. Zunächst schreiben wir die Matrixgleichung (4.51) als ein aus 3 Einzelgleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem, wobei wir Beh. 4.1 berücksichtigen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2y_\kappa^{(1)} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)} x_\kappa^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}_\kappa x_\kappa^{(2)} + \mathbf{A}_\kappa x_\kappa^{(3)}, \\ (2) \quad & 2y_\kappa^{(2)} = \tilde{\mathbf{B}}_\kappa x_\kappa^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_\kappa x_\kappa^{(2)} + \mathbf{N}_\kappa^{(1)} x_\kappa^{(3)}, \\ (3) \quad & 2y_\kappa^{(3)} = \mathbf{B}_\kappa x_\kappa^{(1)} + \mathbf{D}_\kappa x_\kappa^{(3)}. \end{aligned}$$

Wie zu Beginn des vorigen Abschnitts erläutert, gilt

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(11)} + O(|\kappa|),$$

und  $(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(11)}$  ist bijektiv. Nach Lemma 3.1 mit  $f(\kappa) = \kappa$  gibt es ein  $\epsilon_1 > 0$  so, daß die Inverse

$$[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} : \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^\perp \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^\perp$$

für  $|\kappa| < \epsilon_1$  existiert und der Abschätzung

$$(4.62) \quad [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} = [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{(11)}]^{-1} + O(|\kappa|)$$

genügt. Wir wenden die für  $|\kappa| < \epsilon_1$  definierten Operatoren

$$\tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} : \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^\perp \longrightarrow \text{sp} \{ \tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \}$$

und

$$\mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} : \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{L}'_0)^\perp \longrightarrow \text{sp} \{ \varphi^1, \dots, \varphi^n \}$$

auf (1) an und erhalten so die Gleichungen

$$(*) \quad 2\tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} y_\kappa^{(1)} = \tilde{\mathbf{B}}_\kappa x_\kappa^{(1)} + \tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa x_\kappa^{(2)} + \tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa x_\kappa^{(3)},$$

$$(**) \quad 2\mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} y_\kappa^{(1)} = \mathbf{B}_\kappa x_\kappa^{(1)} + \mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa x_\kappa^{(2)} + \mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa x_\kappa^{(3)}.$$

Wir subtrahieren (\*) von (2) und (\*\*) von (3) und führen abkürzende Bezeichnungen ein. Dadurch erhalten wir die Gleichungen

$$(2') \quad \overline{2y_\kappa^{(2)}} = \overline{\tilde{\mathbf{D}}_\kappa} x_\kappa^{(2)} + \overline{\mathbf{N}_\kappa^{(1)}} x_\kappa^{(3)},$$

$$(3') \quad \overline{2y_\kappa^{(3)}} = \overline{\mathbf{N}_\kappa^{(2)}} x_\kappa^{(2)} + \overline{\mathbf{D}_\kappa} x_\kappa^{(3)}$$

mit den Abkürzungen

$$\overline{y_\kappa^{(2)}} := y_\kappa^{(2)} - \tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} y_\kappa^{(1)},$$

$$\overline{y_\kappa^{(3)}} := y_\kappa^{(3)} - \mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} y_\kappa^{(1)},$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{D}}_\kappa} := \tilde{\mathbf{D}}_\kappa - \tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa,$$

$$\overline{\mathbf{D}_\kappa} := \mathbf{D}_\kappa - \mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa,$$

$$\overline{\mathbf{N}_\kappa^{(1)}} := \mathbf{N}_\kappa^{(1)} - \tilde{\mathbf{B}}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}_\kappa,$$

$$\overline{\mathbf{N}_\kappa^{(2)}} := -\mathbf{B}_\kappa [(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_\kappa.$$

Wir geben nun Abschätzungen für die neu eingeführten Operatoren und Vektoren an.

**Beh. 4.7.**

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{y}}_{\kappa}^{(2)} &= \mathbf{y}_0^{(2)} + O(|\kappa|), \\ \overline{\mathbf{y}}_{\kappa}^{(3)} &= \mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2), \\ \overline{\mathbf{D}}_{\kappa} &= \mathbf{D}_{\kappa} + O(|\kappa|^4), \\ \overline{\mathbf{N}}_{\kappa}^{(1)} &= O(|\kappa|^2), \\ \overline{\mathbf{N}}_{\kappa}^{(2)} &= O(|\kappa|^4), \\ \overline{\mathbf{D}}_{\kappa} &= \kappa^2 \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} + O(|\kappa|^3).\end{aligned}$$

*Beweis.* Diese Abschätzungen basieren auf der Beschränktheit von

$$[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1} = O(1)$$

und den in Abschnitt 4.4.2 durchgeführten Untersuchungen. Nach Beh. 4.4 und 4.3 ist

$$\overline{\mathbf{y}}_{\kappa}^{(2)} = \underbrace{\mathbf{y}_{\kappa}^{(2)}}_{= \mathbf{y}_0^{(2)} + O(|\kappa|)} - \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|)} \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1}}_{= O(1)} \underbrace{\mathbf{y}_{\kappa}^{(1)}}_{= O(1)} = \mathbf{y}_0^{(2)} + O(|\kappa|)$$

und analog

$$\overline{\mathbf{y}}_{\kappa}^{(3)} = \underbrace{\mathbf{y}_{\kappa}^{(3)}}_{= \mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2)} - \underbrace{\mathbf{B}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|^2)} \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1}}_{= O(1)} \underbrace{\mathbf{y}_{\kappa}^{(1)}}_{= O(1)} = \mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2).$$

Aus den Behauptungen 4.2 und 4.3 folgt

$$\overline{\mathbf{N}}_{\kappa}^{(1)} = \underbrace{\mathbf{N}_{\kappa}^{(1)}}_{= O(|\kappa|^2)} - \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|)} \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1}}_{= O(1)} \underbrace{\mathbf{A}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|^2)} = O(|\kappa|^2)$$

und

$$\overline{\mathbf{N}}_{\kappa}^{(2)} = - \underbrace{\mathbf{B}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|^2)} \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1}}_{= O(1)} \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|^2)} = O(|\kappa|^4),$$

sowie analog die Abschätzung für  $\overline{\mathbf{D}}_{\kappa}$ . Schließlich folgt mit Beh. 4.5

$$\overline{\mathbf{D}}_{\kappa} = \underbrace{\tilde{\mathbf{D}}_{\kappa}}_{= \kappa^2 \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} + O(|\kappa|^3)} - \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|)} \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{\kappa})^{(11)}]^{-1}}_{= O(1)} \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{\kappa}}_{= O(|\kappa|^2)} = \kappa^2 \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} + O(|\kappa|^3).$$

□

Da  $\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}$  nach Beh. 4.5 invertierbar ist, erweist sich  $\overline{\mathbf{D}}_{\kappa}$  nach Beh. 4.7 für hinreichend kleine  $|\kappa| \neq 0$  als invertierbar, so daß wir einen weiteren Eliminationsschritt durchführen können. Dazu definieren wir die Operatornschar

$$\mathbf{F}_{\kappa} := \kappa^{-2} [\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}]^{-1} \overline{\mathbf{D}}_{\kappa}$$

für  $0 < |\kappa| < \epsilon_1$ . Diese Schar läßt sich nach Beh. 4.7 stetig nach  $\kappa = 0$  fortsetzen mit dem Grenzwert

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}$$

und erfüllt die Abschätzung

$$\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{I} + O(|\kappa|).$$

Wir können somit Lemma 3.1 anwenden: es gibt ein  $\epsilon_2 \in (0, \epsilon_1)$  so, daß  $\mathbf{F}_\kappa^{-1}$  für  $|\kappa| < \epsilon_2$  existiert und die Abschätzung

$$\mathbf{F}_\kappa^{-1} = \mathbf{I} + O(|\kappa|)$$

erfüllt. Also existiert für  $0 < |\kappa| < \epsilon_2$  die Inverse

$$[\overline{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} = [\kappa^2 \check{\mathbf{D}}_{(2)} \mathbf{F}_\kappa]^{-1} = \kappa^{-2} \mathbf{F}_\kappa^{-1} [\check{\mathbf{D}}_{(2)}]^{-1}$$

und genügt der Abschätzung

$$(4.63) \quad [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} = \kappa^{-2} [\check{\mathbf{D}}_{(2)}]^{-1} + O(|\kappa|^{-1}) = O(|\kappa|^{-2}).$$

Wir wenden den für  $0 < |\kappa| < \epsilon_2$  erklärten Operator

$$\overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} : \text{sp} \{ \tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^p \} \longrightarrow \text{sp} \{ \varphi^1, \dots, \varphi^n \}$$

auf (2') an und erhalten

$$(***) \quad 2\overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} \overline{\mathbf{y}}_\kappa^{(2)} = \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} \chi_\kappa^{(2)} + \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(1)} \chi_\kappa^{(3)}.$$

Subtraktion dieser Gleichung von (3') liefert

$$(3'') \quad \overline{\overline{\mathbf{y}}}_\kappa^{(3)} = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_\kappa \chi_\kappa^{(3)}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{y}}}_\kappa^{(3)} &:= \overline{\mathbf{y}}_\kappa^{(3)} - \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} \overline{\mathbf{y}}_\kappa^{(2)}, \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}}_\kappa &:= \overline{\mathbf{D}}_\kappa - \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)} [\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1} \overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(1)}. \end{aligned}$$

Wie oben schätzen wir die neu eingeführten Operatoren und Vektoren ab:

**Beh. 4.8.**

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{y}}}_\kappa^{(3)} &= \mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2), \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}}_\kappa &= \kappa^2 \mathbf{D}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{D}_{(3)} + O(|\kappa|^4). \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus den Behauptungen 4.7 und 4.4 sowie (4.63) folgt

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{y}}}_\kappa^{(3)} &= \underbrace{\overline{\mathbf{y}}_\kappa^{(3)}}_{\mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2)} - \underbrace{\overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)}}_{=O(|\kappa|^4)} \underbrace{[\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \underbrace{\overline{\mathbf{y}}_\kappa^{(2)}}_{=O(1)} = \mathbf{y}_0^{(3)} + O(|\kappa|^2). \end{aligned}$$

Nach Beh. 4.6 gilt

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{D}}}_\kappa &= \underbrace{\overline{\mathbf{D}}_\kappa}_{=\mathbf{D}_\kappa + O(|\kappa|^4)} - \underbrace{\overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(2)}}_{=O(|\kappa|^4)} \underbrace{[\check{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \underbrace{\overline{\mathbf{N}}_\kappa^{(1)}}_{=O(|\kappa|^2)} = \mathbf{D}_\kappa + O(|\kappa|^4) \\ &= \kappa^2 \mathbf{D}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{D}_{(3)} + O(|\kappa|^4). \end{aligned}$$

□

Wie im Beweis von Satz 3.1 folgt, daß die Gleichungssysteme (1),(2),(3) und (1),(2'),(3'') zueinander äquivalent sind. Letzteres hat Dreiecksform:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2y_\kappa^{(1)} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)} x_\kappa^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}_\kappa x_\kappa^{(2)} + \mathbf{A}_\kappa x_\kappa^{(3)}, \\ (2') \quad & \overline{2y_\kappa^{(2)}} = \overline{\tilde{\mathbf{D}}_\kappa} x_\kappa^{(2)} + \overline{\mathbf{N}_\kappa^{(1)}} x_\kappa^{(3)}, \\ (3'') \quad & \overline{\overline{2y_\kappa^{(3)}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}} x_\kappa^{(3)}, \end{aligned}$$

und erlaubt daher, die gesuchte Lösung  $x_\kappa$  durch Einsetzen „von unten nach oben“ zu bestimmen. Im ersten Schritt suchen wir dabei für hinreichend kleine  $|\kappa| \neq 0$  eine Lösung der Gleichung (3'').

**Beh. 4.9.** *Es gibt ein  $\epsilon_3 \in (0, \epsilon_2)$  so, daß  $\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  invertierbar ist, und für die Inverse gilt die Abschätzung*

$$[\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}]^{-1} = \kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} - \kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} + O(1).$$

*Beweis.* Wir setzen

$$\mathbf{G}_\kappa := \kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} - \kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1}$$

für  $0 < |\kappa| < \epsilon_2$  und

$$\mathbf{F}_\kappa := \mathbf{G}_\kappa \overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}.$$

Es gilt nach Beh. 4.8

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\kappa &= \left( \kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} - \kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \right) \left( \kappa^2 \mathbf{D}_{(2)} + \kappa^3 \mathbf{D}_{(3)} + O(|\kappa|^4) \right) \\ &= \mathbf{I} + O(|\kappa|^2), \end{aligned}$$

da sich die Terme der Ordnung  $O(\kappa)$  wegheben. Die Schar  $\{\mathbf{F}_\kappa\}$  läßt sich also stetig nach  $\kappa = 0$  fortsetzen und nimmt dort den Wert  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}$  an. Nach Lemma 3.1 für  $f(\kappa) = \kappa^2$  gibt es ein  $\epsilon' \in (0, \epsilon_2)$  so, daß  $\mathbf{F}_\kappa^{-1}$  für  $|\kappa| < \epsilon'$  existiert und der Abschätzung

$$\mathbf{F}_\kappa^{-1} = \mathbf{I} + O(|\kappa|^2)$$

genügt. Da  $\mathbf{D}_{(2)}$  bijektiv ist, findet man wie bei der Diskussion von  $\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}$  ein  $\epsilon_3 \in (0, \epsilon')$  so, daß  $\mathbf{G}_\kappa$  und somit  $\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}} = \mathbf{G}_\kappa^{-1} \mathbf{F}_\kappa$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  bijektiv ist. Ferner folgt aus der Definition von  $\mathbf{G}_\kappa$  und der Abschätzung für  $\mathbf{F}_\kappa^{-1}$

$$[\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}]^{-1} = \mathbf{F}_\kappa^{-1} \mathbf{G}_\kappa = \kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} - \kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} + O(1).$$

□

Nach Beh. 4.9 besitzt (3'') für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $x_\kappa^{(3)}$ , und es gilt nach Beh. 4.8 und 4.9

$$\begin{aligned} (4.64) \quad x_\kappa^{(3)} &= 2 [\overline{\overline{\mathbf{D}_\kappa}}]^{-1} \overline{\overline{y_\kappa^{(3)}}} \\ &= 2 \left( \kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} - \kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} + O(1) \right) \left[ y_0^{(3)} + O(|\kappa|^2) \right] \\ &= 2\kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} - 2\kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} + O(1). \end{aligned}$$

Für die nächsten Schritte benötigen wir nur die gröbere Abschätzung

$$(4.65) \quad x_\kappa^{(3)} = O(|\kappa|^{-2}).$$

Wir setzen  $x_\kappa^{(3)}$  in (2') ein und können nach  $x_\kappa^{(2)}$  auflösen, da  $\overline{\mathbf{D}}_\kappa$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  invertierbar ist. Nach Beh. 4.7, (4.63) und (4.65) gilt für  $x_\kappa^{(2)}$  die Abschätzung

$$(4.66) \quad \begin{aligned} x_\kappa^{(2)} &= \underbrace{[\overline{\mathbf{D}}_\kappa]^{-1}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \left( \underbrace{2\mathbf{y}_\kappa^{(2)}}_{=O(1)} - \underbrace{\mathbf{N}_\kappa^{(1)}}_{=O(|\kappa|^2)} \underbrace{x_\kappa^{(3)}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \right) \\ &= O(|\kappa|^{-2}). \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir (4.65) und (4.66) in (1) ein und lösen nach  $x_\kappa^{(1)}$  auf. Aus Beh. 4.2 und 4.4 folgt

$$(4.67) \quad \begin{aligned} x_\kappa^{(1)} &= \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{L}_\kappa)^{(11)}]^{-1}}_{=O(1)} \left( \underbrace{2\mathbf{y}_\kappa^{(1)}}_{=O(1)} - \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_\kappa}_{=O(|\kappa|^2)} \underbrace{x_\kappa^{(2)}}_{=O(|\kappa|^{-2})} - \underbrace{\mathbf{A}_\kappa}_{=O(|\kappa|^2)} \underbrace{x_\kappa^{(3)}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \right) \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Nach (4.46) und (4.48) gilt

$$(4.68) \quad x_\kappa^{(2)} = \eta_{1,\kappa} \tilde{\Psi}_1 + \cdots + \eta_{p,\kappa} \tilde{\Psi}_p.$$

Dabei hängen die Koeffizienten  $\eta_{i,\kappa} := \langle \tilde{\Psi}^i, x_\kappa^{(2)} \rangle$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon_3$  stetig von  $\kappa$  ab und erfüllen aufgrund der Stetigkeit des Innenprodukts die Abschätzung

$$\eta_{1,\kappa}, \dots, \eta_{p,\kappa} = O(|\kappa|^{-2}).$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts in einem Lemma zusammen, wobei wir die in (4.64) auftretenden Terme mittels der Basisdarstellungen von  $\mathbf{D}_{(2)}$  und  $\mathbf{D}_{(3)}$  auswerten.

**Lemma 4.8.** *Es existiert ein  $\epsilon > 0$  so, daß die Integralgleichung (4.41) des ERP für  $0 < |\kappa| < \epsilon$  eine eindeutige Lösung  $x_\kappa$  besitzt. Für  $\kappa \rightarrow 0$  gilt*

$$x_\kappa = \kappa^{-2} \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, y_0 \rangle \psi_j - \kappa^{-1} \frac{i}{4\pi} \sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{l=1}^n \varphi_l, y_0 \right\rangle \left( \sum_{k=1}^n C^{jk} \right) \psi_j + \sum_{i=1}^p \eta_{i,\kappa} \tilde{\Psi}_i + O(1)$$

mit

$$\eta_{i,\kappa} = O(|\kappa|^{-2}) \quad \text{für } i = 1, \dots, p.$$

*Beweis.* Wegen

$$x_\kappa = x_\kappa^{(1)} + x_\kappa^{(2)} + x_\kappa^{(3)}$$

folgt die Existenz und Eindeutigkeit von  $x_\kappa$  für  $0 < |\kappa| < \epsilon := \epsilon_3$ . Ferner folgt aus den obigen Abschätzungen für  $x_\kappa^{(j)}$

$$(4.69) \quad x_\kappa = 2\kappa^{-2} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} - 2\kappa^{-1} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} + \sum_{i=1}^p \eta_{i,\kappa} \tilde{\Psi}_i + O(1).$$

Wir wollen nun die ersten beiden Terme weiter auswerten. Dazu setzen wir

$$\zeta_j := \langle \psi^j, 2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} \rangle \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Wegen  $2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} \in \text{sp} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \}$  und  $\langle \psi^i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$  gilt

$$2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} y_0^{(3)} = \zeta_1 \psi_1 + \cdots + \zeta_n \psi_n.$$



Wir bestimmen die Koeffizienten  $\zeta_j$  aus der Gleichung

$$2\mathbf{y}_0^{(3)} = \mathbf{D}_{(2)} \left[ \sum_{j=1}^n \zeta_j \psi_j \right]$$

durch Bilden der Innenprodukte mit den adjungierten elektrischen Eigenfunktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Es sei  $(\mathbf{D}_{(2),ij})_{i,j=1\dots n}$  die Matrix des linearen Operators  $\mathbf{D}_{(2)}$  bezüglich der Basen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  im Urbildraum und  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  im Bildraum. Dann gilt analog zum Nachweis von Beh 4.5  $\mathbf{D}_{(2),ij} = \langle \varphi_i, \mathbf{D}_{(2)} \psi_j \rangle$  und somit für  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 2\langle \varphi_i, \mathbf{y}_0 \rangle &= 2\langle \varphi_i, \mathbf{y}_0^{(3)} \rangle = \sum_{j=1}^n \zeta_j \langle \varphi_i, \mathbf{D}_{(2)} \psi_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \zeta_j \mathbf{D}_{(2),ij} \stackrel{\text{Beh. 4.6}}{=} \sum_{j=1}^n 2\zeta_j \delta_{ij} \\ &= 2\zeta_i. \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\zeta_i = \langle \varphi_i, \mathbf{y}_0 \rangle$  bzw.

$$(4.70) \quad 2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{y}_0^{(3)} = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{y}_0 \rangle \psi_j.$$

Analog ergibt sich für den zweiten Term

$$(4.71) \quad 2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{y}_0^{(3)} = \zeta'_1 \psi_1 + \dots + \zeta'_n \psi_n$$

mit

$$\zeta'_j := \langle \psi^j, 2[\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{D}_{(3)} [\mathbf{D}_{(2)}]^{-1} \mathbf{y}_0^{(3)} \rangle \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Nach (4.70) und (4.71) gilt

$$\mathbf{D}_{(3)} \left[ \sum_{l=1}^n \langle \varphi_l, \mathbf{y}_0 \rangle \psi_l \right] = \mathbf{D}_{(2)} \left[ \sum_{j=1}^n \zeta'_j \psi_j \right].$$

Durch Innenproduktbildung mit  $\varphi_i$  folgt für  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{l=1}^n \langle \varphi_l, \mathbf{y}_0 \rangle \langle \varphi_i, \mathbf{D}_{(3)} \psi_l \rangle = \sum_{j=1}^n \zeta'_j \langle \varphi_i, \mathbf{D}_{(2)} \psi_j \rangle$$

bzw.

$$\sum_{l=1}^n \langle \varphi_l, \mathbf{y}_0 \rangle \mathbf{D}_{(3),il} = \sum_{j=1}^n \zeta'_j \mathbf{D}_{(2),ij},$$

und somit nach Beh. 4.6

$$\sum_{l=1}^n \langle \varphi_l, \mathbf{y}_0 \rangle \left( \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n C^{ik} \right) = \sum_{j=1}^n 2\zeta'_j \delta_{ij} = 2\zeta'_i$$

bzw.

$$\frac{i}{4\pi} \left\langle \sum_{l=1}^n \varphi_l, \mathbf{y}_0 \right\rangle \left( \sum_{k=1}^n C^{ik} \right) = \zeta'_i.$$

□

#### 4.4.4 Das Verhalten der Lösung des ERP für $\kappa \rightarrow 0$

Für  $0 < |\kappa| < \epsilon$ ,  $\text{Im } \kappa \geq 0$  stellt das nach Satz 2.3 von  $\kappa_\kappa$  erzeugte Potentialfeld die gemäß Satz 2.1 eindeutige Lösung  $E'_\kappa$  des ERP dar. Mit Hilfe von Lemma 4.6 folgt aus Lemma 4.8 die nachstehende Abschätzung für  $E'_\kappa$  gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\bar{\Omega}$ :

$$E'_\kappa = \kappa^{-2} \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, y_0 \rangle E_\kappa^{\psi_j} - \kappa^{-1} \frac{i}{4\pi} \sum_{j=1}^n \langle \sum_{l=1}^n \varphi_l, y_0 \rangle \left( \sum_{k=1}^n C^{jk} \right) E_\kappa^{\psi_j} + \sum_{i=1}^p \eta_{i,\kappa} E_\kappa^{\tilde{\psi}_i} + O(1).$$

Nach Lemma 4.7 gilt weiter

$$\sum_{i=1}^p \underbrace{\eta_{i,\kappa}}_{=O(|\kappa|^{-2})} \underbrace{E_\kappa^{\tilde{\psi}_i}}_{=O(|\kappa|^2)} = O(1).$$

In die verbleibenden Terme setzen wir die Abschätzungen  $E_\kappa^{\psi_j} = E_0^{\psi_j} + O(|\kappa|^2) \stackrel{(4.25)}{=} Y_j + O(|\kappa|^2)$  ein und erhalten

$$E'_\kappa = \kappa^{-2} \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, y_0 \rangle Y_j - \kappa^{-1} \frac{i}{4\pi} \sum_{j=1}^n \langle \sum_{l=1}^n \varphi_l, y_0 \rangle \left( \sum_{k=1}^n C^{jk} \right) Y_j + O(1).$$

Nach (4.32) und der vorausgehenden Rechnung ist

$$\langle \varphi_j, y_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} c_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \varphi_j \right\rangle = -(F, Y^j).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, y_0 \rangle Y_j = - \sum_{j=1}^n (F, Y^j) Y_j \stackrel{(4.32)}{=} -P_{+0} F$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle \sum_{l=1}^n \varphi_l, y_0 \rangle \left( \sum_{k=1}^n C^{jk} \right) Y_j &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (F, Y^l) C^{jk} Y_j \\ &= -(F, \sum_{l=1}^n Y^l) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C^{kj} Y_j \\ &\stackrel{(4.15)}{=} -(F, \sum_{l=1}^n Y^l) \sum_{k=1}^n Y^k \\ &= -(F, Y_\bullet) Y_\bullet \end{aligned}$$

mit

$$(4.72) \quad Y_\bullet := \sum_{k=1}^n Y^k,$$

da nach 4.2 mit  $(C_{ij})$  auch  $(C^{ij})$  symmetrisch ist.<sup>9</sup> Wir fassen zusammen:

<sup>9</sup> $Y_\bullet$  wird nach (4.16) durch die Eigenschaften  $\xi_k(Y_\bullet) = \sum_{j=1}^n \xi_k(Y^j) = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} = 1$  für  $k = 1, \dots, n$  charakterisiert.

**Satz 4.1.** Die eindeutige Lösung  $E'_\kappa$  des ERP erfüllt für festes  $F$  die Abschätzung

$$E'_\kappa = -\frac{1}{\kappa^2} P_{+0} F + \frac{1}{\kappa} \frac{i}{4\pi} (F, Y_\bullet) Y_\bullet + O(1) \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0$$

gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$ , wobei  $P_{+0}$  die Projektion auf  $\mathcal{N}(A)$  bezeichnet und  $Y_\bullet$  durch (4.72) gegeben ist.  $Y_\bullet$  ist das eindeutig bestimmte Dirichletfeld in  $\Omega$  mit dem konstanten elektrostatischen Potential 1 auf  $\partial\Omega$ :

$$\xi_1(Y_\bullet) = \dots = \xi_n(Y_\bullet) = 1.$$

**Bemerkung.** Es ist im allgemeinen  $\|Y_\bullet\| \neq 1$ . Daher entspricht

$$(F, Y_\bullet) Y_\bullet = \|Y_\bullet\|^2 P_{Y_\bullet} F$$

der Projektion  $P_{Y_\bullet} F$  von  $F$  auf den durch  $Y_\bullet$  erzeugten eindimensionalen Teilraum von  $\mathcal{N}(A)$ , mit von der Geometrie der Reflektoren abhängiger „Verstärkung“  $\|Y_\bullet\|^2$ .

## 5 Anwendungen

### 5.1 Die Spektralschar von $A$

Wir hatten in Abschnitt 2.2 für die Lösung  $E_\kappa[F]$  des Randwertproblems (1.21)–(1.23) den Ansatz (2.15)

$$E_\kappa[F] = E_\kappa^0 + E'_\kappa$$

gemacht. Für festes  $F$  folgt aus (2.16) sofort die Abschätzung

$$E_\kappa^0 = E_0^0 + O(|\kappa|) = O(1).$$

Mit Hilfe von Satz 4.1 können wir nun das Residuum  $C_{-1}[F]$ , das bei den Untersuchungen in [12] offen geblieben war, zu

$$C_{-1}[F] = \frac{i}{4\pi}(F, Y_\bullet)Y_\bullet$$

bestimmen und erhalten:

**Korollar 5.1.** Die Lösung  $E_\kappa[F]$  des Randwertproblems (1.21)–(1.23) erfüllt die Abschätzung

$$E_\kappa[F] = -\frac{1}{\kappa^2}P_{+0}F + \frac{1}{\kappa} \frac{i}{4\pi}(F, Y_\bullet)Y_\bullet + O(1) \quad \text{für } \kappa \rightarrow 0$$

gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von  $\overline{\Omega}$ . Dabei bezeichnet  $Y_\bullet \in \mathcal{N}(A)$  das eindeutig bestimmte Dirichletfeld mit den Eigenschaften

$$\xi_1(Y_\bullet) = \dots = \xi_n(Y_\bullet) = 1.$$

**Bemerkung.** Die entsprechende Abschätzung (1.34) wird in [12], Satz 2.1 lediglich als gleichmäßig in kompakten Teilmengen von  $\Omega$  nachgewiesen. Nach Korollar 5.1 konvergiert diese Entwicklung auch auf dem Rand  $\partial\Omega$  gleichmäßig. Es ist uns also auch in dieser Hinsicht eine leichte Verfeinerung der Ergebnisse von [12] gelungen, die in gewissen Situationen durchaus von Interesse sein kann.

Aus (1.27) folgt eine Abschätzung für die Spektralschar  $\{P_\lambda\}$  von  $A$ :

**Korollar 5.2.** Es gilt

$$\frac{d}{d\lambda}(P_\lambda F)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{4\pi^2}(F, Y_\bullet)Y_\bullet(x) + O(\sqrt{\lambda}) \quad \text{für } \lambda \downarrow 0$$

gleichmäßig bezüglich  $x$  in jeder beschränkten Teilmenge von  $\overline{\Omega}$ .

*Beweis.* Die Potenzreihenentwicklungen, die zu der Abschätzung in Korollar 5.1 geführt haben, können analog für weitere Terme durchgeführt werden (man beachte, daß sämtliche Integraloperatoren und die Randdaten analytisch von  $\kappa$  abhängen). Dadurch läßt sich die Reihenentwicklung von  $E_\kappa[F]$  entsprechend (1.34) erweitern zu

$$E_\kappa[F] = -\frac{1}{\kappa^2}P_{+0}F + \frac{1}{\kappa} \frac{i}{4\pi}(F, Y_\bullet)Y_\bullet + C_0[F] + O(|\kappa|),$$

wobei der konstante Term  $C_0[F]$  hier nicht näher bestimmt zu werden braucht. Speziell gilt für  $\lambda > 0$

$$E_{\sqrt{\lambda}}[F] = -\frac{1}{\lambda}P_{+0}F + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{i}{4\pi}(F, Y_\bullet)Y_\bullet + C_0[F] + O(\sqrt{\lambda})$$

und

$$E_{-\sqrt{\lambda}}[F] = -\frac{1}{\lambda} P_{+0} F - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{i}{4\pi} (F, Y_{\bullet}) Y_{\bullet} + C_0[F] + O(\sqrt{\lambda}).$$

Nach (1.27) folgt hieraus sofort die Behauptung:

$$\frac{d}{d\lambda} (P_{\lambda} F)(x) = \frac{1}{2\pi i} (E_{\sqrt{\lambda}}[F](x) - E_{-\sqrt{\lambda}}[F](x)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{4\pi^2} (F, Y_{\bullet}) Y_{\bullet}(x) + O(\sqrt{\lambda}).$$

□

## 5.2 Das elektrische RAWP mit zeitharmonischer Anregung

In [12] untersucht Werner das folgende Rand- und Anfangswertproblem unter elektrischen Randbedingungen für beliebige  $\omega > 0$ :

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) - \Delta E(x, t) = F(x) e^{-i\omega t} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

$$(5.2) \quad n \times E = 0, \quad \nabla \cdot E = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(5.3) \quad E(x, 0) = G_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x, 0) = G_1(x),$$

wobei die vorgegebenen Felder  $F, G_0, G_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  jeweils beschränkten Träger haben sollen. Des weiteren werden die **Kompatibilitätsbedingungen**

$$(5.4) \quad n \times \Delta^k F = n \times \Delta^k G_0 = n \times \Delta^k G_1 = 0,$$

$$(5.5) \quad \nabla \cdot \Delta^k F = \nabla \cdot \Delta^k G_0 = \nabla \cdot \Delta^k G_1 = 0$$

auf  $\partial\Omega$  für  $k = 0, 1, \dots$  vorausgesetzt. Unter diesen Voraussetzungen besitzt das elektrische RAWP (5.1)–(5.3) eine eindeutige Lösung  $E \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ , die sich in der folgenden Form darstellen läßt ([12], (2.4)):

$$(5.6) \quad E(\cdot, t) = \int_0^\infty \cos \sqrt{\lambda} t \, d(P_{\lambda} G_0) + \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \, d(P_{\lambda} G_1) + \int_0^\infty \psi(\lambda, t) \, d(P_{\lambda} F),$$

wobei

$$(5.7) \quad \psi(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda - \omega^2} \left( e^{-i\omega t} + \frac{i\omega}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t - \cos \sqrt{\lambda} t \right)$$

für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$(5.8) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda \right) \psi = e^{-i\omega t},$$

$$(5.9) \quad \psi(\lambda, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \psi(\lambda, 0) = 0$$

bezeichnet. Nach [12], Satz 3.1 gilt für die Lösung  $E(x, t)$  die Abschätzung

$$(5.10) \quad E(\cdot, t) = tE^{(1)} + E^{(0)} + e^{-i\omega t} E_{\omega}[F] + o(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in kompakten Teilmengen von  $\Omega$ ; nach der Bemerkung in Abschnitt 5.1 gilt die Abschätzung sogar gleichmäßig in jeder beschränkten Teilmenge von  $\bar{\Omega}$ . Dabei ist

$$(5.11) \quad E^{(1)} = P_{+0} \left( \frac{1}{i\omega} F + G_1 \right)$$

und

$$(5.12) \quad E^{(0)} = P_{+0} \left( \frac{1}{\omega^2} F + G_0 \right) - i C_{-1} \left[ \frac{1}{i\omega} F + G_1 \right].$$

Nachdem wir nun das Residuum zu

$$C_{-1}[F] = \frac{i}{4\pi} (F, Y_\bullet) Y_\bullet$$

bestimmt haben, können wir  $E^{(0)}$  explizit angeben:

$$(5.12') \quad E^{(0)} = P_{+0} \left( \frac{1}{\omega^2} F + G_0 \right) + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{i\omega} F + G_1, Y_\bullet \right) Y_\bullet.$$

### 5.3 Das elektrische RAWP mit konstanter Anregung

Wir wollen nun das elektrische Rand- und Anfangswertproblem (5.1)–(5.3) für  $\omega = 0$ , d.h. mit konstanter Anregung untersuchen. Gesucht ist also eine Lösung  $\tilde{E} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$  von

$$(5.13) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{E}(x, t) - \Delta \tilde{E}(x, t) = F(x) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

$$(5.14) \quad n \times \tilde{E} = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{E} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(5.15) \quad \tilde{E}(x, 0) = G_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(x, 0) = G_1(x),$$

wobei wieder die Kompatibilitätsbedingungen (5.4) und (5.5) erfüllt sein sollen. Wie beim RAWP mit zeitharmonischer Anregung findet man, daß sich die eindeutig bestimmte Lösung  $\tilde{E}$  über Spektralintegrale darstellen läßt:

$$(5.16) \quad \tilde{E}(\cdot, t) = \int_0^\infty \cos \sqrt{\lambda} t \, d(P_\lambda G_0) + \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \, d(P_\lambda G_1) + \int_0^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F).$$

$\tilde{\psi}(\lambda, \cdot)$  bezeichnet hierbei für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$(5.17) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda \right) \tilde{\psi} = 1,$$

$$(5.18) \quad \tilde{\psi}(\lambda, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\lambda, 0) = 0.$$

Es gilt

$$(5.19) \quad \tilde{\psi}(\lambda, t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\lambda} & , \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{2} t^2 & , \lambda = 0 \end{cases}$$

und man entnimmt der Reihendarstellung

$$\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \lambda^k t^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \lambda^{k-1} t^{2k},$$

daß  $\tilde{\psi}(\lambda, t)$  auch bei  $\lambda = 0$  analytisch in  $\lambda$  und  $t$  ist.

Zur Abschätzung von  $\tilde{E}(x, t)$  für  $t \rightarrow \infty$  sei nun eine beschränkte Menge  $M \subseteq \overline{\Omega}$  beliebig gewählt. Alle folgenden Abschätzungen gelten **gleichmäßig** für  $x \in M$ . Die ersten beiden Integrale in (5.16) haben sich gegenüber (5.6) nicht verändert. Wir können daher die Abschätzungen [12], (3.54) und (3.55) direkt übernehmen:<sup>1</sup>

$$(5.20) \quad \int_0^\infty \cos \sqrt{\lambda} t \, d(P_\lambda G_0) = P_{+0} G_0 + o(1)$$

und

$$(5.21) \quad \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \, d(P_\lambda G_1) = t(P_{+0} G_1) - iC_{-1}[G_1] + o(1)$$

für  $t \rightarrow \infty$ . Nun ist noch das Integral

$$(5.22) \quad \int_0^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) = \underbrace{\tilde{\psi}(0, t)}_{=t^2/2} (P_{+0} F) + \lim_{\eta \downarrow 0} \int_\eta^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) + \int_1^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F)$$

abzuschätzen.<sup>2</sup> Zunächst ist

$$\sup_{\lambda \geq 1} |\tilde{\psi}(\lambda, t)| \leq 2 \quad \forall t \geq 0$$

und nach [12], Lemma 3.1 existiert ein  $\gamma > 0$  so, daß

$$\left| \left[ \int_1^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) \right] (x) \right| \leq 2\gamma \|\Delta F\| \quad \forall x \in M \quad \forall t \geq 0.$$

Damit gilt die Abschätzung

$$(5.23) \quad \int_1^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) = O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in  $M$ . Zur Abschätzung des zweiten Integralterms in (5.22) schreiben wir für das uneigentliche Integral kurz

$$\int_{0+}^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) := \lim_{\eta \downarrow 0} \int_\eta^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F).$$

Da  $(P_\lambda F)(x)$  für  $\lambda > 0$  und  $x \in M$  nach  $\lambda$  differenzierbar ist ([11], 19), gilt

$$\left[ \int_{0+}^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \, d(P_\lambda F) \right] (x) = \int_{0+}^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \frac{d}{d\lambda} (P_\lambda F)(x) \, d\lambda.$$

Nach Korollar 5.2 ist

$$(5.24) \quad \frac{d}{d\lambda} (P_\lambda F)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{4\pi^2} (F, Y_\bullet) Y_\bullet(x) + \rho(\lambda, x),$$

wobei für  $0 < \lambda \leq 1$  die Abschätzung

$$(5.25) \quad |\rho(\lambda, x)| \leq \beta \sqrt{\lambda} \quad \forall x \in M$$

<sup>1</sup>vgl. [12], (3.39) und (3.40)

<sup>2</sup>vgl. zu dieser Zerlegung des Spektralintegrals [12], (2.19) und (3.5); man beachte, daß die Spektralschar  $\{P_\lambda\}$  linksstetig gewählt wurde ([12], 118)

mit einer geeigneten Konstanten  $\beta > 0$  gilt. Wir berechnen nun

$$(5.26) \quad \int_{0+}^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \frac{d}{d\lambda} (P_\lambda F)(x) d\lambda \stackrel{(5.24)}{=} \\ = \underbrace{\left( \frac{1}{4\pi^2} \int_{0+}^1 \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda^{3/2}} d\lambda \right)}_{=:g(t)} (F, Y_\bullet) Y_\bullet(x) + \underbrace{\int_{0+}^1 \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda} \rho(\lambda, x) d\lambda}_{=:B(x,t)}.$$

Wir schätzen die Integrale  $g(t)$  und  $B(x, t)$  getrennt ab. Wegen (5.25) gilt für beliebiges  $t > 0$

$$\left| \int_{0+}^1 \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda} \rho(\lambda, x) d\lambda \right| \leq \int_{0+}^1 \left| \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda} \rho(\lambda, x) \right| d\lambda \\ \leq \int_{0+}^1 \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = 2\beta \int_{0+}^1 \lambda^{-1/2} d\lambda \\ = 4\beta$$

und damit

$$(5.27) \quad B(x, t) = O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Zur Berechnung von  $g(t)$  substituieren wir  $\lambda = \xi^2/t^2$ ,  $d\lambda = (2\xi/t^2) d\xi$ :

$$(5.28) \quad g(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{0+}^1 \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda^{3/2}} d\lambda = \frac{t}{2\pi^2} \int_{0+}^t \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi.$$

Wegen

$$\left| \int_0^t \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi - \int_0^\infty \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi \right| \leq \int_t^\infty \frac{2}{\xi^2} d\xi = \frac{2}{t}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi = \underbrace{\left[ -\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi}_{=\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

gilt

$$\left| \int_0^t \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{2}{t}$$

und somit nach (5.28)

$$\left| g(t) - \frac{t}{4\pi} \right| \leq \frac{t}{2\pi^2} \frac{2}{t} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Damit gilt die Abschätzung

$$(5.29) \quad g(t) = \frac{t}{4\pi} + O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Einsetzen von (5.27) und (5.29) in (5.26) führt auf die Abschätzung

$$\int_{0+}^1 \tilde{\psi}(\lambda, t) \frac{d}{d\lambda} (P_\lambda F)(x) d\lambda = \frac{t}{4\pi} (F, Y_\bullet) Y_\bullet(x) + O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$



die gleichmäßig bzgl.  $x \in M$  gilt. Zusammen mit (5.23) erhalten wir damit aus (5.22)

$$(5.30) \quad \int_0^\infty \tilde{\psi}(\lambda, t) d(P_\lambda F) = \frac{t^2}{2} P_{+0} F + \frac{t}{4\pi} (F, Y_\bullet) Y_\bullet + O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Wir fassen die Abschätzungen (5.20), (5.21) und (5.30) im folgenden Korollar zusammen.

**Korollar 5.3.** *Unter den zu Beginn von Abschnitt 5.2 angegebenen Bedingungen gilt für die Lösung  $\tilde{E}(x, t)$  von (5.13)–(5.15) die Abschätzung*

$$\tilde{E}(\cdot, t) = \frac{t^2}{2} P_{+0} F + t \left( P_{+0} G_1 + \frac{1}{4\pi} (F, Y_\bullet) Y_\bullet \right) + O(1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

*gleichmäßig in jeder beschränkten Teilmenge von  $\overline{\Omega}$ .*

## Literatur

- [1] D. COLTON UND R. KRESS, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York: Wiley, 1983.
- [2] V. GÜLZOW, *Eine Integralgleichungsmethode für die zeitharmonischen Maxwellgleichungen mit Randbedingungen für die Normalkomponenten*, Dissertation, Universität Göttingen, 1987.
- [3] R. KRESS, „On the limiting behaviour of solutions to boundary integral equations associated with time harmonic wave equations for small frequencies,“ *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **1** (1979), 89–100.
- [4] R. C. MACCAMY, „Low frequency acoustic oscillations,“ *Quart. Appl. Math.* **23** (1965), 247–256.
- [5] E. MARTENSEN, *Potentialtheorie*, Stuttgart: Teubner, 1968.
- [6] P. WERNER, „Randwertprobleme der mathematischen Akustik,“ *Arch. Rat. Mech. Anal.* **10** (1962), 29–66.
- [7] P. WERNER, „On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields,“ *J. Math. Anal. Appl.* **7** (1963), 348–396.
- [8] P. WERNER, „A distribution-theoretical approach to certain Lebesgue and Sobolev spaces,“ *J. Math. Anal. Appl.* **29** (1970), 18–78.
- [9] P. WERNER, „Selfadjoint extensions of the Laplace operator with respect to electric and magnetic boundary conditions,“ *J. Math. Anal. Appl.* **70** (1979), 131–160.
- [10] P. WERNER, „Regularity properties of the Laplace operator with respect to electric and magnetic boundary conditions,“ *J. Math. Anal. Appl.* **87** (1982), 560–602.
- [11] P. WERNER, „Spectral properties of the Laplace operator with respect to electric and magnetic boundary conditions,“ *J. Math. Anal. Appl.* **92** (1983), 1–65.
- [12] P. WERNER, „Aperiodic electromagnetic waves in exterior domains,“ *J. Math. Anal. Appl.* **135** (1988), 112–164.
- [13] P. WERNER, „Resonance phenomena in local perturbations of parallel-plane waveguides,“ *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **19** (1996), 773–823.